Investigaciones en educación matemática.

Aportes desde una Unidad de investigación

José Ortiz y Martha Iglesias
Editores

Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación / Unidad de Investigación del Ciclo Básico (UICB) de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), Universidad de Carabobo (UC), Campus La Morita. — 1ra Ed. Maracay, Venezuela. 2015.

250 p.

1. Matemáticas – Modelos matemáticos – Enseñanza de las matemáticas – Educación Matemática

Primera edición, 2015

Compilado y editado por:
José Ortiz y Martha Iglesias

Coordinación Editorial: Revisión, Corrección y Estilo:
Ligia Sánchez

Diseño y Concepto Gráfico, Diagramación y Montaje:
Francisco Ponte

Depósito Legal: lfi55320155103892
ISBN Electrónico: 978-980-233-603-6

Hecho en Venezuela
Made in Venezuela

PRESENTACIÓN

Los valiosos aportes que se recogen en este libro son parte del resultado de una actividad académica e investigativa que, de manera ininterrumpida, se ha venido desarrollando durante los últimos 10 años en la Unidad de Investigación del Ciclo Básico (UICB) de Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), Universidad de Carabobo (UC), Campus La Morita. Es en esta Unidad donde se ha logrado organizar el Seminario Permanente de Investigación (SPI), como espacio para la exposición, discusión y puesta al día de las producciones, hallazgos e inquietudes investigativas, lo cual favoreció el encuentro entre pares, y el fortalecimiento de las líneas de investigación adscritas a la UICB, todo ello evidenciado en el surgimiento de inquietudes respecto a la profundización de algunas problemáticas investigadas o la identificación de nuevos problemas a investigar, con abordajes metodológicos similares o distintos. Es decir, el SPI ha resultado un valioso espacio académico, en el cual investigadores de nuestras diversas casas de estudio universitarias logran confrontar y disertar sobre sus posicionamientos epistémicos, lo que les ha permitido enriquecer sus miradas de los problemas estudiados. En este sentido, uno de los grandes aportes de los encuentros en el seminario fue que de ellos emergió la necesidad la profundizar o indagar en torno a problemas de actualidad, no visibilizados, que se afrontan en nuestras realidades de manera diferenciada.

La importancia y trascendencia de esta experiencia, orientó el esfuerzo de documentarla para su divulgación, de allí que este primer libro de la UICB, recoge en particular los productos que fueron presentados en el marco de la Línea de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, para conmemorar en este año 2015, el décimo aniversario del Seminario Permanente de Investigación (SPI). Este aniversario nos invita a celebrar junto a todos los que han hecho posible esta actividad académica de apoyo a la investigación; al mismo tiempo, nos conduce a reflexionar sobre lo realizado, lo actual y lo que esperamos sea el SPI en los años venideros. Si bien nos complace lo alcanzado hasta ahora, aún queda mucho por revisar. En este sentido, repensar el Seminario Permanente de Investigación y su marco de acción, la UICB, nos conduce a plantearnos nuevos retos, por un lado en el ámbito investigativo, que pudieran resultar temerarios, pero se soportan en la fuerza que acompaña el compromiso que tenemos como académicos e investigadores y en la voluntad y fortaleza que inspira el propósito de contribuir en el conocimiento de los determinantes de situaciones que dificultan en los estudiantes la comprensión de los componentes matemáticos de su formación profesional; en este sentido, uno de nuestros retos se orientará a impulsar la indagación sobre problemas altamente sensibles, pero poco atendidos a lo largo de los tiempos, como lo es la repitencia en matemáticas y su articulación con el fracaso universitario. Y por el otro procurar incorporar en el programa del Seminario actividades de carácter formativo tipo talleres, dirigidos a apoyar el quehacer investigativo.

Ahora bien, orgullosos de los logros alcanzados, el libro que hoy les presentamos nos muestra una parte de lo recorrido en la UICB, específicamente en lo relacionado con la Educación Matemática. Es una mirada hacia los trabajos presentados por investigadores que mostraron sus contribuciones y propuestas en sesiones del SIP, durante este tiempo. De esta manera, ofrecemos a los lectores una revisión actualizada de las conferencias dictadas por cada investigador en el SIP durante estos diez años transcurridos. Se invitó a los investigadores a desarrollar sus trabajos en extenso, hasta completar una propuesta de capítulo para el presente libro. Los capítulos presentados fueron sometidos a evaluación externa. Después del proceso de arbitraje, y la declinación de algunas invitaciones, quedaron las contribuciones que componen este libro, estructurado en quince capítulos, con el cual se conmemoran los 10 años del SIP.

En el capítulo 1, Ángela Mora asume la Modelación Matemática como una estrategia de enseñanza que propicia la construcción de conceptos matemáticos, estableciendo vínculos entre realidad y Matemática; por ello, se centra en el diseño de tareas con modelación en el contexto de la formación inicial de profesores de Matemática, mostrando el uso del análisis didáctico.

En el capítulo 2, Arnaldo Mendible destaca la necesidad de abordar situaciones problemáticas en un contexto cercano a aquel en el cual se desempeñará el futuro profesional universitario y, por ende, muestra la relevancia de la modelación matemática y describe los rasgos característicos de los modelos matemáticos.

En el capítulo 3, Ana Ramos, desde la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico, diseña y valida un cuestionario dirigido al análisis de los significados personales del objeto matemático función, a partir de las respuestas dadas por un grupo de estudiantes universitarios cursantes de la asignatura “Introducción a la Matemática”.

En el capítulo 4, Hernán Paredes da a conocer un estudio de las actividades matemáticas del Pueblo Wayuu, atendiendo a la categorización propuesta por Alan Bishop (1999). Para llevarlo a cabo, el autor realizó una recopilación y revisión de fuentes documentales y entrevistas a informantes clave como docentes

Wayuu y antropólogos. Con este estudio se contribuye al fortalecimiento de la identidad cultural del Pueblo Wayuu.

En el capítulo 5, Elsa Tirado, basándose en una investigación de campo, presenta un modelo interpretativo de las competencias didácticas que los profesores de Matemática ponen en juego cuando diseñan y gestionan procesos de enseñanza – aprendizaje en los cuales se incorporan las tecnologías de información y comunicación.

La autora del capítulo 6, Yolimar Goatache, diseña un hipervideo, con la finalidad de ser utilizado como herramienta didáctica en el aprendizaje del Cálculo, ya que, propicia los procesos de visualización y conceptualización, a partir del manejo de diferentes sistemas de representación de conceptos y propiedades matemáticas.

El capítulo 7, presentado por Celina Espinoza, Carol Omaña y José Fernández, describe el proceso de diseño y evaluación de un video didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la estadística en el ámbito universitario, ya que, consideran que este tipo de recurso didáctico capta la atención de los estudiantes favoreciendo el aprendizaje significativo de nociones estadísticas como el cálculo y la interpretación de las medidas de forma en una serie de datos.

El capítulo 8, su autor Luis Capace, toma como referencia las seis dimensiones propuestas por Godino (2003), muestra una valoración del proceso de enseñanza de la Matemática en Ingeniería y establece un conjunto de elementos que deberían ser tomados en cuenta para superar el bajo rendimiento, la repitencia y la deserción estudiantil en las carreras de Ingeniería.

En el capítulo 9, Angélica Martínez, aborda el uso de las TIC para la enseñanza de la Matemática en el contexto de la Educación Especial, apoyándose en la revisión de fuentes documentales y la reflexión en y sobre su práctica como formadora, en el área de Matemática, de futuros profesores especialistas en Educación Especial.

En el capítulo 10, Sabrina Garbin, establece qué se entiende por Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), así como los rasgos distintivos tanto del Pensamiento Matemático Elemental (PME) como del PMA; además, da a conocer algunos modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Asimismo, aborda algunos de los aspectos que toman en cuenta ciertas investigaciones en la Didáctica del Cálculo y Análisis (aportes y prospectivas).

El autor del capítulo 11, Wladimir Serrano, desde una visión socio-crítica de la Educación Matemática, presenta los elementos considerados en diversos estudios realizados sobre los libros de texto de Matemática en Venezuela, desde el realizado por Boris Bossio en 1941, pasando por los trabajos realizados por Samuel Qüenza (1972, 1985 y 1986), hasta llegar a los desarrollados por Walter Beyer, Julio Mosquera y Ángel Míguez.

En el capítulo 12, Mario Arrieche, expone rigurosamente una síntesis de los referentes teóricos y metodológicos en los cuales se soportan las investigaciones desarrolladas en el marco de la línea “Perspectivas del Enfoque Semiótico Antropológico para la Didáctica de la Matemática”, así como un balance de los trabajos culminados o en proceso de desarrollo durante el período 2002 – 2015.

En el capítulo 13, Julia Sanoja, coordinadora de la línea de investigación en Educación Estadística, adscrita al Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la UPEL Maracay, reporta un estudio sobre el conocimiento de contenido estadístico manifestado por un grupo de 115 futuros profesores de Matemática, cuando respondieron un cuestionario sobre algunas nociones estadísticas: organización de datos, representaciones gráficas e interpretación de las medidas de tendencia central (media aritmética, moda y mediana) de un conjunto de datos.

En el capítulo 14, Martha Iglesias y José Ortiz, recogen algunos aportes teóricos de la investigación en y sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, teniendo como referencia la revisión de la literatura especializada, así como los hallazgos de las investigaciones realizadas desde CEINEM – NT, enfatizando en la aplicación del modelo de razonamiento geométrico propuesto por Pierre y Dina Van Hiele y en la demostración en geométrica desde las perspectivas epistemológicas, cognitivas y didácticas.

Finalmente, en el capítulo 15, José Ortiz y Martha Iglesias, elaboran una disertación sobre los fundamentos y campos de actuación de la línea de investigación "Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico", adscrita a la UICB. Asimismo, se hace referencia a dos investigaciones en esta línea, una relacionada con la competencia de planificación y el análisis didáctico en el diseño de actividades didácticas de álgebra, con modelación y sistemas de cálculo simbólico. La otra investigación focaliza la formación de preparadores de matemática en la universidad y su preparación disciplinar y didáctica para desarrollar más adecuadamente su trabajo práctico de apoyo a la docencia.

El contenido de este libro podría servir como una modesta contribución a la investigación en Educación Matemática. Asimismo, esperamos que estimule la indagación y generación de nuevos productos en esta disciplina científica.

Los editores
José Ortiz y Martha Iglesias

ÍNDICE

Modelación matemática en la formación de profesores

Angela Mora Zuluaga

Modelación matemática en la formación de profesores

Introducción

La modelación matemática constituye un tema central en el debate actual de la investigación en Educación Matemática. Diversos autores la han conceptualizado y esgrimido las ventajas de este proceso para la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En este sentido, Barbosa (2001a) lo entiende como un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos indagan y/o investigan, por medio de la Matemática, sobre situaciones que surgen en otras áreas de la realidad. Por su parte, para Blomhøj (2004), constituye una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática.

En este trabajo se asume como una estrategia de enseñanza que posibilita la construcción de conceptos matemáticos de forma más comprensiva para los estudiantes, pues les permite dotarlos de sentido y significado. En este sentido, constituye un proceso donde se estudia la relación entre un fenómeno y una subestructura, concepto u objeto matemático, a partir de una situación o problema del mundo físico, social o real, con la finalidad de aproximarse al fenómeno y comprenderlo o darle respuesta utilizando las matemáticas escolares. Por otra parte, se asume como un proceso flexible, recursivo y cíclico, donde el modelo debe dirigirse a comprender y resolver el problema o situación real.

Como estrategia de enseñanza, la modelación parte de un tema y desarrolla sobre éste, preguntas y cuestiones para ser resueltas, comprendidas o inferidas, permitiendo al alumno construir conocimientos con significado y sentido. En este caso, la modelación es un elemento importante en la planificación de unidades didácticas, pues influye y determina en el tipo de tareas u oportunidades de aprendizaje que diseñan y seleccionan los profesores para el desarrollo de un contenido matemático escolar.

En lo sucesivo, se argumenta la importancia de esta estrategia en la formación inicial del profesor de matemáticas. Seguidamente, se trata de orientar el diseño de tareas con modelación, esbozando los elementos a tomar en cuenta y las distintas formas de implementación en el aula. Por último, se mencionan las dificultades que pudieran abordar los profesores de matemáticas en formación, cuando diseñan tareas utilizando la modelación como estrategia para la enseñanza de contenidos matemáticos escolares.

¿Cuál es el rol de la modelación en la formación inicial del profesor de matemáticas?

Partiendo de la modelación como estrategia de enseñanza y elemento clave en la planificación, se asume que la formación inicial del profesor de matemáticas debe propiciar experiencias y oportunidades de reflexión y análisis del rol de esta estrategia en la enseñanza de un contenido matemático. En este sentido, Ortiz (2002), Mathews y Redd (2007), y Ortiz, Rico y Castro (2007) sostienen que la modelación permite a los profesores en formación desarrollar ideas sobre lo que significa enseñar matemáticas y desarrollar estrategias y técnicas para la enseñanza de un contenido particular.

Por su parte, Barbosa (2001a) refiere la necesidad de integrarla en la formación inicial del profesor de matemáticas porque permite desafiar las concepciones de los futuros profesores sobre la Matemática y su enseñanza, con la finalidad de ponerla en perspectiva para su trabajo docente. Adicionalmente afirma que el profesor en formación debe tener oportunidades para reflexionar sobre experiencias con modelación en el contexto escolar con respecto a su organización, formas de aplicación, dificultades, trabajo de los alumnos, y formas de intervención del profesor. La reflexión sobre estos aspectos posibilita la construcción de conocimientos que fundamenten sus prácticas con esta estrategia de enseñanza.

En este orden de ideas, para Ortiz (2002) la modelación amplia el conocimiento didáctico, desarrolla el pensamiento del futuro profesor y genera un espacio de reflexión en la construcción del conocimiento matemático y le permite conectar el contexto de los alumnos con las matemáticas. De este modo los ayuda a percibir que las matemáticas escolares pueden utilizarse para comprender, describir e interpretar la realidad.

Oliveira (2006) refiere que la modelación posibilita el desarrollo de conocimientos matemáticos, brinda una percepción del papel de las matemáticas en la sociedad y propicia el escenario para su integración en la práctica educativa de los profesores en formación. Por su parte, Doerr (2007) sostiene que los profesores de matemáticas en formación necesitan experiencias sobre modelación, las cuales les provean de un rango de contextos y herramientas para la enseñanza y les permitan participar en el análisis de su propia actividad de modelación. Los estudiantes necesitan evaluar sus propias ideas y los profesores deben proporcionar oportunidades donde esa evaluación pueda ser productiva y formativa.

Como ya se mencionó, la modelación organiza la selección, diseño y secuenciación de tareas. Como parte de la formación inicial del profesor de matemáticas, este proceso requiere el desarrollo de unas capacidades. Las capacidades que logra desarrollar el profesor en formación cuando piensa y reflexiona sobre el uso de la modelación como estrategia de enseñanza, se esbozan en Mora y Ortiz (2012) y Mora (2014) y se mencionan a continuación:

- Identifica fenómenos en distintos contextos, asociados al concepto.
- Identifica situaciones de distintas áreas de conocimiento o asignaturas asociadas al contenido, donde sea posible utilizar la modelación.
- Identifica situaciones reales donde sea posible utilizar la modelación, relacionándola con contenidos matemáticos específicos.
- Abstrae de una situación real, las propiedades y características que permiten la construcción del modelo para aproximarse a ésta.
- Identifica los contenidos, conceptos, propiedades y estrategias propias de la Matemática escolar que posibilitan obtener resultados a partir del modelo.
- Integra la modelación en el planteamiento de situaciones u oportunidades de aprendizaje.
- Selecciona la forma de utilización de modelación matemática en el diseño de las tareas u oportunidades de aprendizaje.
- Desarrolla preguntas y cuestionamientos sobre situaciones reales, para utilizarlas como punto de partida en el proceso de modelación matemática.
- Diseña actividades de exploración e investigación donde se abordan distintos contenidos matemáticos escolares, que permitan la utilización de la modelación por parte de los estudiantes.

De acuerdo con estas capacidades, la modelación como estrategia de enseñanza, permite a los profesores en formación reflexionar y negociar significados sobre el tipo de tareas u oportunidades de aprendizaje que elaboran cuando planifican una unidad didáctica. Para esto, establecen relaciones entre las expectativas de aprendizaje, las dimensiones de la competencia matemática implicadas en ellas, los errores y dificultades previstas y los recursos seleccionados para la enseñanza, entre otros.

Pero la potencia de este rol de la modelación en la formación inicial, radica en el desarrollo de la capacidad del futuro docente de relacionar un contenido matemático escolar con el contexto del estudiante. Esto no es para mostrar una aplicación, sino para que ese contenido tenga para el estudiante, a quien van dirigidas las tareas, un sentido y un significado que le haga considerarlo importante, cercano y se interese en aprenderlo. Esto requiere procesos reflexivos por parte del profesor en formación, sobre los contextos y problemas que puede utilizar para la enseñanza de contenidos matemáticos escolares, estableciendo relaciones con la fenomenología del contenido.

En otras palabras, el uso de la modelación como estrategia de enseñanza, moviliza y pone en práctica unas capacidades que contribuyen a desarrollar el conocimiento del futuro profesor de matemáticas, pues involucra procesos de análisis sobre la conexión del concepto con el contexto del estudiante, es decir, con su mundo real. Adicionalmente, reflexiona sobre su visión de las matemáticas en el contexto y sobre cómo esta se relaciona con los contenidos del currículo de Educación Media.

Por lo expuesto anteriormente, la modelación como estrategia de enseñanza representa un avance sobre la enseñanza de las matemáticas pues permite visualizar los contenidos matemáticos como herramientas o estructuras para otras áreas de conocimiento y no para la simple transmisión y desarrollo de técnicas y algoritmos. Sin embargo, y de acuerdo con la opinión tanto de Biembengut y Hein (2004) como de Mora y Ortiz (2012), ésta no representa una panacea para resolver todos los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la práctica escolar, ella exige una mirada distinta y una conceptualización diferente sobre la comprensión, la función docente, el rol del estudiante, el conocimiento, la enseñanza, el aprendizaje y la Matemática escolar. En este sentido, la potencialidad de esta estrategia de enseñanza depende del análisis sobre aspectos de la planificación relacionados con el tema y contenido matemático objeto de enseñanza, y su integración en el diseño de las tareas. Es decir, la visión de la modelación como estrategia de enseñanza, requiere que ésta se integre en una planificación que tome en cuenta la complejidad de la enseñanza del contenido matemático escolar, para diseñar unas tareas que permitan mediar entre esa complejidad, el contexto del estudiante y su aprendizaje.

¿Cómo diseñar tareas con modelación?

El diseño de las tareas u oportunidades de aprendizaje que conforman una unidad didáctica, forma parte de la planificación de la enseñanza del contenido matemático relacionado con ellas. En este caso, la planificación de la enseñanza constituye una competencia clave del profesor de matemáticas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) y como tal, requiere del desarrollo de unas capacidades específicas que le permitan identificar, organizar, seleccionar, y priorizar los significados de los conceptos, con la finalidad de establecer las expectativas de aprendizaje, diseñar las tareas, elegir los materiales y recursos, y las estrategias de evaluación.

Para Gómez (2007) esta competencia tiende a organizarse de acuerdo con las capacidades necesarias para gestionar las cuatro dimensiones del currículo: contenido, aprendizaje, enseñanza y evaluación. Estas dimensiones, a su vez organizan los componentes que conforman lo que Gómez denomina análisis didáctico (AD), conceptualizado como el "procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas" (Gómez, 2007, p. 130). Este está conformado por cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y actuación, que se interrelacionan y conforman un ciclo mutuamente recursivo. El Gráfico 1 resume la finalidad de cada uno de ellos.

El análisis de contenido permite al profesor identificar, seleccionar y organizar los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático, que considera relevantes en su planificación. El análisis cognitivo toma en cuenta lo vinculado al aprendizaje del tema matemático por parte de los estudiantes. El análisis de instrucción contempla la selección, diseño y secuencia de tareas, materiales y recursos a utilizar para lograr las expectativas de aprendizaje. Y, finalmente, el análisis de actuación da cuenta de la medida de los logros, la plausibilidad de los recursos utilizados, el contexto y las evaluaciones realizadas.

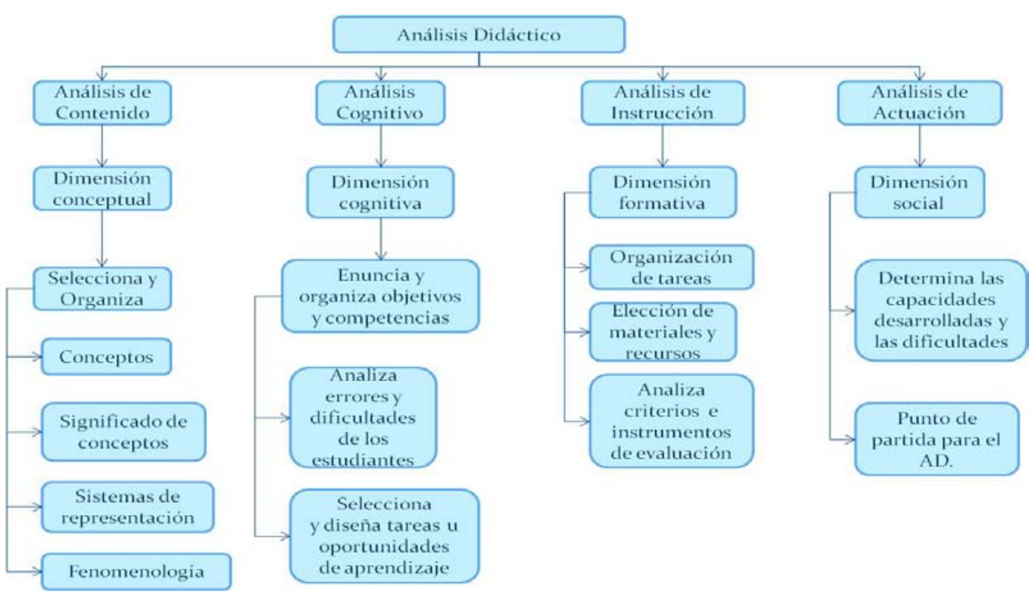


Gráfico 1. **Análisis Didáctico.**

Para el logro de las finalidades descritas en el Gráfico 1, cada uno de estos análisis se organiza en función de los organizadores del currículo, definidos por Rico (1997) como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas (p. 45). En este caso, los organizadores del currículo constituyen herramientas conceptuales y metodológicas, las cuales permiten al profesor recabar, seleccionar y organizar la información necesaria para la planificación de la enseñanza de un contenido matemático escolar. El Cuadro 1 resume algunos organizadores del currículo correspondientes a los tres primeros análisis.

Cuadro 1
Organizadores del Currículo

Análisis de contenido	*Análisis cognitivo*	*Análisis de instrucción*
• Estructura conceptual. • Sistemas de representación. • Fenomenología.	• Expectativas de aprendizaje. • Errores y dificultades. • Tareas.	• Análisis de tareas. • Recursos y materiales didácticos. • Estrategias de evaluación.

En este caso, la modelación como estrategia de enseñanza, influye en la selección y diseño de tareas del análisis cognitivo, y su organización en el análisis de instrucción. Para diseñar una tarea, es necesario tomar en cuenta e interrelacionar la información recabada a través de los organizadores del currículo del análisis didáctico. Las tareas u oportunidades de aprendizaje no surgen de la nada, ni se toman aleatoriamente de un texto. Cada una de ellas debe tener una finalidad y una razón de ser, cada una se diseña y selecciona tomando en cuenta diversos elementos de la planificación de la enseñanza.

En otras palabras, cuando el profesor de matemáticas en formación, aborda el diseño de las tareas de una unidad didáctica, debe tomar en cuenta que estas responden a una estructura conceptual previamente establecida; se relacionan con unos sistemas de representación del contenido matemático reflexionados y elegidos; se conectan con unos fenómenos y situaciones del contexto estudiadas y analizadas; responden y se relacionan con unas expectativas de aprendizaje, en términos de finalidades de enseñanza, competencias y capacidades a desarrollar; y deben contribuir a superar y abordar unos errores y dificultades previamente reflexionadas. Cuando se diseña una tarea, se toma en cuenta el análisis didáctico del contenido para el cual se realiza dicho diseño.

Uno de los principales puntos de partida para el diseño de tareas con modelación, lo constituye la identificación de los fenómenos asociados o relacionados con el contenido objeto de enseñanza. Con base en ellos, se seleccionan las situaciones problema que pueden relacionarse con el contexto del estudiante a quien va dirigida la tarea. Seguidamente, y tomando en cuenta la información de los demás organizadores del currículo, se redactan los enunciados que configurarán las tareas.

En este punto, es aconsejable analizar la correspondencia de estas con las finalidades de enseñanza y las competencias que se desean desarrollar en el estudiante. Para esto, el profesor en formación deberá responder ¿Con cuáles finalidades de enseñanza se relaciona cada enunciado? ¿Cuáles son las capacidades que pone en práctica el estudiante, cuando desarrolla cada tarea? ¿Se relacionan estas capacidades con las dimensiones de la competencia matemática que se busca desarrollar? ¿Permite esta tarea abordar errores y dificultades que pudiera enfrentar el estudiante cuando intenta aprender el contenido? ¿Cuáles son los recursos disponibles para el desarrollo de cada tarea?, entre otras interrogantes.

Por otra parte, resulta importante destacar que cada tarea involucra unas estructuras y subestructuras matemáticas, relacionadas con el tema objeto de enseñanza, que permitirán la identificación del modelo matemático a utilizar, relacionado con el contenido matemático escolar en proceso de desarrollo. Cabe destacar, que el uso de la modelación como estrategia de enseñanza, se relaciona con la construcción de modelos que permiten acercarse a una realidad, o interpretarla, analizarla, realizar preguntas y responderlas; utilizando la matemática escolar. En otras palabras, la finalidad de esta estrategia es realizar aproximaciones a la situación problema y a los fenómenos, y no la construcción de modelos matemáticos formales, pues estos requieren una matemática que trasciende lo escolar.

Con relación a lo anterior, para poder utilizar la matemática escolar, las situaciones problema deben restringirse, es decir, se requiere descartar variables y asumir situaciones ideales, ya que esto permite simplificar el modelo de tal forma que haga posible involucrar las matemáticas escolares en la solución de la situación problema. Es en estos aspectos donde radica la diferencia entre la construcción de modelos matemáticos y el uso de la modelación como estrategia de enseñanza de contenidos matemáticos escolares. Sólo el segundo escenario se relaciona con la enseñanza de contenidos matemáticos y, por ende, es abordado por los profesores de matemáticas.

Por último, una vez que se analiza la forma como cada tarea contribuye al logro de las finalidades de enseñanza y el desarrollo de la competencia matemática, éstas se organizan tomando en cuenta su grado de complejidad, que dependerá de las capacidades involucradas y las relaciones entre ellas.

Por otra parte, para el diseño de tareas con modelación, se debe reflexionar sobre cómo esta estrategia será utilizada en el aula. Con relación a esto, Barbosa (2001b), partiendo de las experiencias relatadas en la literatura especializada, propone tres niveles, situaciones o casos para el uso de esta estrategia, asociadas con el contexto escolar, la experiencia de los profesores y los intereses de los alumnos, entre otros factores. En otras palabras, cada uno de ellos diferenciados por su grado de complejidad y el rol del profesor y los estudiantes.

- *Primer caso (Nivel 1):* El profesor elige un tema, simplifica y elabora una situación problemática, presenta los datos necesarios para su resolución, elabora un modelo matemático y deja que los alumnos discutan sobre la solución del problema, orientados por el profesor. En este caso, el docente tiene una mayor participación en la conducción y orientación de las actividades de modelización.
- *Segundo caso (Nivel 2):* El profesor propone una situación problemática a ser resuelta por los alumnos con su orientación, y los alumnos son responsables de simplificar la situación problema, recolectar los datos necesarios para su resolución y proporcionar la solución a la situación problema. En este caso existe una menor conducción de las actividades de modelización por parte del profesor.
- *Tercer caso (Nivel 3):* Los alumnos eligen un tema, simplifican y elaboran una situación problemática, recolectan los datos necesarios para su resolución y proporcionan la solución a la situación problema, es decir, todas las etapas son conducidas por los alumnos con la orientación del profesor. En este caso se evidencia una mayor autonomía de los alumnos en la conducción de las actividades de modelación.

Estos tres casos o niveles, proporcionan opciones a los futuros profesores para el diseño y selección de las tareas durante la planificación de la enseñanza de contenidos matemáticos escolares. La elección de la forma de implementación de la modelación en la secuenciación de las tareas proporciona oportunidades de discusión y reflexión sobre la enseñanza de un contenido matemático y sobre la naturaleza de los modelos matemáticos asociados a éste. Además, posibilita la reflexión sobre la visión de las matemáticas en el contexto y sobre cómo esta se relaciona con los contenidos del currículo de Educación Media.

Dificultades asociadas al diseño de tareas con modelación

Cuando los profesores en formación diseñan tareas con modelación, pueden enfrentar dificultades relacionadas con su formación, su experiencia, su visión sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre las matemáticas, entre otros aspectos. En este apartado se toman en cuenta las dificultades identificadas en un estudio cualitativo, desarrolladas en Mora (2014) y en Mora y Ortiz (2012).

En este sentido, las dificultades que pudieran abordar profesores en formación cuando diseñan tareas con modelación, pueden relacionarse con la construcción de los enunciados y con la redacción de tareas sobre los distintos casos o niveles de modelación. Con relación a esto, la formación del futuro docente, y sobre todo el modelo de formación experimentado, puede generar contradicciones entre sus vivencias y la experiencia de formación que se plantea cuando planifica la enseñanza de un contenido matemático, desde la visión del análisis didáctico y la modelación como estrategia de enseñanza, pues esta pudiera requerir una manera diferente de ver y pensar la enseñanza de contenidos matemáticos. Esto en razón de la tendencia del profesor en formación, de imitar o trabajar del mismo modo que lo hacen los profesores que los forman (Mora, 2014; Mora y Ortiz, 2012). Asociado a esto, si los profesores en formación no tienen experiencias donde desarrollen tareas con modelación y donde diseñen tareas, al enfrentarse por primera vez a la redacción de enunciados y formulación de problemas con modelación deberán abordar dificultades asociadas con la ausencia de experiencias previas, y por ende, se dificultarán sus prácticas con modelación.

Por otra parte, las dificultades para el diseño de tareas con modelación pueden relacionarse con la capacidad de los profesores en formación para identificar los fenómenos asociados al contenido y las situaciones problema relacionadas con éste. Adicionalmente, la percepción del futuro docente sobre la disposición de los estudiantes de Educación Media General para realizar actividades donde deban indagar información, puede influir en el nivel de tareas con modelación que seleccione.

Otro aspecto a considerar, tiene que ver con los hallazgos de Barboza (2001a), Oliveira (2006) y Mora (2014) quienes develaron que uno de los obstáculos para las actividades de modelación son las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza de la Matemática y la Matemática, y sobre cómo esta se aprende; y además, que la manera como los profesores en formación conciben la modelación es mediada por sus concepciones sobre la matemática y su enseñanza.

Lo anteriormente señalado, muestra la importancia de desarrollar experiencias con modelación durante la formación inicial del profesor de matemáticas, pues estas configuran y determinan no sólo sus prácticas con esta estrategia, sino su disposición hacia su uso para la enseñanza de contenidos matemáticos escolares.

Consideraciones finales

La formación inicial del profesor de matemáticas debe brindarle la oportunidad de desarrollar capacidades que le permitan vincular las matemáticas con el contexto del estudiante y con otras áreas y disciplinas; organizar la enseñanza de contenidos matemáticos; y desarrollar experiencias que le faciliten la reflexión y análisis de la práctica educativa. Para esto, dicha formación debe permitir desarrollar la potencialidad de la modelación como estrategia de enseñanza, que radica más que en mostrar unas aplicaciones, en desarrollar una enseñanza de contenidos matemáticos que permita a los estudiantes dar sentido a los contenidos que intenta aprender.

Adicionalmente, resulta interesante destacar que la modelación como estrategia de enseñanza determina el tipo de tareas que se diseñan para desarrollar un contenido matemático escolar, y sobre todo requiere de una visión de la enseñanza que propicie la integración de las matemáticas con otras áreas y disciplinas, y con la realidad del alumno.

Por otra parte, el diseño de tareas con modelación debe tomar en cuenta la complejidad de la enseñanza de contenidos matemáticos. Para esto, ellas deben abordarse desde una planificación que tome en cuenta las distintas dimensiones del currículo y los aspectos relacionados con cada una de ellas. En otras palabras, se quiere resaltar la importancia de un diseño de tareas que se fundamente en la reflexión y análisis de la enseñanza del contenido matemático escolar y no en una selección aleatoria de las mismas.

Por último, el uso de la modelación para el diseño de tareas de una unidad didáctica puede enfrentar al profesor en formación a dificultades relacionadas con su formación previa, sus experiencias, sus concepciones sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje, entre otros aspectos. Sin embargo, la integración de la modelación en la formación inicial del profesor de matemáticas puede permitirle superar estas dificultades y de este modo facilitar sus prácticas con esta estrategia de enseñanza y fomentar su disposición hacia el desarrollo de procesos de enseñanza relacionados con esta. De allí la importancia de proporcionar al futuro profesor experiencias donde éste use esta estrategia y donde diseñe tareas abordables desde la modelación.

Referencias

Barbosa, J. (2001a). Modelagem matemática e os profesores: a questão da formação. *Bolema*, 15, 5-23.

Barbosa, J. (2001b). *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores*. Tesis Doctoral. Universidade Estadual Paulista.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), 105-125.

Blomhøj, M. (2004).Mathematical Modelling. A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education.

Doerr, H. (2007). What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?. En W. Blum, P. Galbrait, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). New York: Springer.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Mathews, S. y Reed, M. (2007). Modelling for pre-service teachers. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*(pp. 458-464). Chichester, Inglaterra: Horwood Publishing.

Mora, A. (2014). *Modelización matemática, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Mora, A. y Ortiz, J. (2012). Formación inicial de profesores de matemáticas y la resolución de problemas reales en ambientes tecnológicos. *Ciencias de la Educación*, 39, 183-206.

Oliveira, A. (2006). *As experiências dos futuros profesores com modelagem matemática*. Presentado en el III Seminário Internacional de Pesquisa en Educação Matemática. São Paulo, Brasil.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2007). Mathematical Modelling: A teacher's training study. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 441-249). Chichester, Inglaterra: Horwood Publishing.

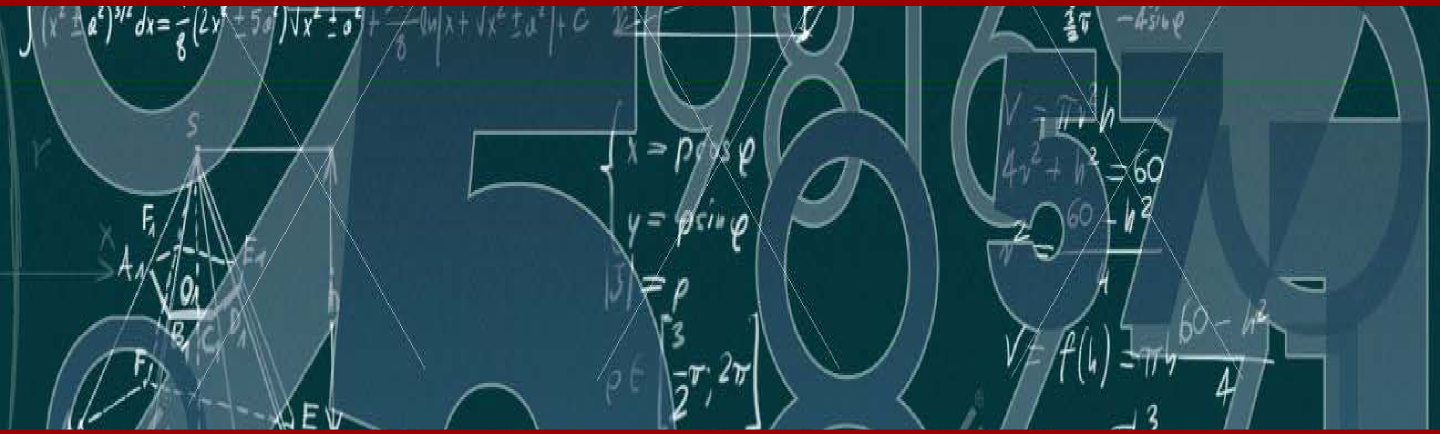
Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Ice-Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.

Ángela Mora Zuluaga.

Doctora en Educación por la Universidad de los Andes (ULA). Profesora Asociada a Dedicación Exclusiva, adscrita al Departamento de Ciencias de la Universidad de Los Andes "Dr. Pedro Rincón Gutiérrez" (ULA-Táchira). Licenciada en Educación, Mención Matemática, por la ULA; Magíster en Matemática, Mención Educación Matemática, por la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET); Investigadora en Educación Matemática. Tiene publicaciones en revistas arbitradas e indizadas, en el ámbito nacional e internacional. Ha presentado trabajos, en eventos científicos de Educación Matemática, nacionales e internacionales.

La modelación matemática: una visión interesada de la realidad



Arnaldo Mendible Sánchez

La modelación matemática: una visión interesada de la realidad

Introducción

Los retos que enfrentan los ciudadanos comunes en la sociedad moderna son cada vez mayores, y las herramientas de comunicación son cada vez más tecnificadas. Los recursos para imaginar, crear o recrear la realidad son cada vez más eficientes. Sin embargo, existen evidencias de mayor incomunicación entre las personas, hay insatisfacción en la manera de vivir o en la manera de producir, además hay una actitud acomodaticia que riñe con los recursos y la información que cada ciudadano posee. Hay actualmente la posibilidad de compartir con otras personas a través de las redes sociales. Se comparten ideas generales, imágenes familiares, ideas políticas y sociales, etc.; pero con la plataforma tecnológica, mediante la cual se logra esto, pareciera que no hubiera intención de educar, no posee fin. Es decir, su carácter teleológico está encerrado en sí mismo, sólo en lo comunicacional. Se presenta de esta forma un problema educacional.

Ante estos dilemas, urge a la academia y las instituciones de formación profesional, percibir ese problema, sus consecuencias y sus implicaciones como graves. En especial, los docentes comprometidos podrían actuar para contribuir a resolver los problemas que están planteados.

Por tanto, en una visión pedagógica asertiva, la realidad debería ser manejada como oportunidad para aprender, y por otro lado el educador debería desear que esa realidad fuese superada y transformada para aumentar la calidad de vida de las personas. Las universidades tomarían para sí esa responsabilidad y se anunciarían alternativas como las que en este artículo se presentan.

Adicionalmente, en cualquier nivel la educación matemática posee características propias. El pensamiento de los estudiantes y el desarrollo de competencias en matemática se han convertido en un asunto de estado y de seguridad nacional. Pero como es sabido, la tecnología y la ciencia crecen al mismo ritmo de la investigación en matemáticas.

Entonces, la educación debe garantizar un desarrollo continuo y sostenido de los niveles de comprensión en matemáticas para que se manifieste en consecuencia un aumento de la productividad académica, científica y tecnológica de cada nación. Además, se debe erigir una plataforma educativa sólida, con una educación matemática que actúe sobre las mayorías ampliando la cultura, consolidando habilidades especiales para tratar lo cotidiano y transformar el medio ambiente y social del país.

En los problemas que de esto están planteados, algunos fundamentos y conceptos intervienen de manera estructural. Así surge la consideración de lo cognitivo, lo ético, lo social, lo económico, lo artístico, lo que propicia estos espacios de actuación, lo conceptual, los procedimientos que se requieren para concretarlos y los criterios que los hacen admisibles y apropiados. Al integrarlo todo se diseña un contexto, el cual es personal y con propósito hacia el problema y su solución. De esto se toma el sustrato que interviene como fuente didáctica para ubicar al estudiante en la situación, y así mismo mostrarle los recursos que le permitirían atender la problemática.

El Contexto

Toda situación problemática se manifiesta en el mundo real y se recurre al mundo matemático para que de manera relativa se plantee alternativas de solución con el uso de la matemática (Niss, Blum y Galbraith, 2007). En este proceso consultivo entre estos mundos, aparecen el ambiente y los recursos tangibles o intangibles que colocan esa situación en contexto. A este proceso y su acción sobre las personas y sobre la naturaleza, se le identifica como la realidad asociada a esa situación.

Pero el sustrato de la realidad está en la realidad misma, y el educador debe diseñar ambientes académicos apropiados para el aprendizaje, utilizando para eso lo que de la realidad se pueda tomar. Tradicionalmente se planifica y se administran recursos didácticos para tal fin. Asimismo, al planificar se hace consideración de los tiempos, de los materiales, las actividades y la manera en que estratégicamente se dictan los contenidos, para que al final se evalúen los aprendizajes. Pero este esquema es unidireccional en buena medida. Con este proceso se logra transmitir información, que dependiendo de la madurez intelectual de cada estudiante, ella es procesada y comprendida, para que al final se evalúe el desempeño académico. Sin embargo, la realidad actúa categóricamente en el proceso de aprendizaje, ya que es a través de procesos multidimensionales, y experienciales como se lo asume y dinamiza.

Por lo mismo, en el caso de la educación matemática, tradicionalmente la realidad se enuncia en los problemas, y aparecen acentuadas experiencias que se fundan en la idea de la formación de herramientas computacionales y de cálculo con modelos ya creados y normalizados. Para Vigostky (1995), "La ejecución del acto automático no plantea ningún problema y, por tanto, no procesa de conciencia" (p. 106) con lo que por esa vía, la mecanización en los procedimientos matemáticos aprendidos quedan sólo para expresar algunas habilidades parciales de cálculo algebraico, pero no interviene en la formación consciente de habilidades y destrezas en el estudiante.

Lo descrito puede ayudar al estudiante a reconocer las relaciones iniciales y superficiales con el planteamiento de un problema, pero para Vigostky (Op. Cit.), por medio de esta vía, se da el "pensamiento instrumental", el cual se manifiesta en el desarrollo menos complejo del lenguaje. Pero, se reconoce que el lenguaje es el catalizador de esta operación, mientras la realidad se muestra ante el estudiante por medio de la necesidad de enfrentar el problema. Luego se opera en la persona, por medio del desarrollo del lenguaje y de manera no automática, mecanismos mentales que le hacen superar la visión inicial del problema, instrumentando soluciones.

Dentro de esta línea de pensamiento, Contreras (2013) manifiesta los propósitos que orientan este proceso, y corrobora algunos propósitos de la nueva visión de la educación matemática.

> Aunque el objetivo directo de un curso de matemáticas son los conocimientos enunciados como lemas, proposiciones y teoremas, objetivo indirecto es el desarrollo del pensamiento que ayuda a:
>
> 1. Comprender lo que nos rodea.
> 2. Realizar instrucciones sabiendo para qué son.
> 3. Aumentar los conocimientos descubriendo relaciones al plantearse nuevas preguntas.
> 4. Decidir más libremente.
> 5. Innovar. (p. 117)

En relación a la formación de profesionales, los problemas reales que surgen al ejercer cualquier profesión están fuera del alcance de la matemática formal y mecanicista. En el ámbito educativo, esas situaciones problemáticas poseen una sustancia significativa que les son propias, sobre todo al tratar los problemas en contexto real (intra y extra cátedra), ellas dependen de cada persona y del desarrollo de habilidades del futuro profesional universitario. En ese sentido, para cualificar y categorizar estos desarrollos, se hace indispensable que se diferencie lo real de lo abstracto, es decir, se debe resaltar qué es lo real o sustancial de lo formal y simbólico. Para Reid, Knipping y Crosby (2011), las matemáticas en el aula son contextos para el aprendizaje, los argumentos en ella están basados en la lógica en transición de la lógica diaria, que desde el estudiante se da en clases hacia la lógica matemática aceptada por el docente. Entendiendo eso, el contexto es el resultado de la interacción lógica y compleja descrita como realidad-matemática-estudiante-docente (Morin, 1990).

De todo esto nace la noción de “contexto”. Al contexto se le define entonces, como todo aquello que está relacionado con una situación problemática en el mundo real, que permita suministrar información para resolverla, sugiriendo reconocimiento de los elementos constitutivos de la situación misma, y la previsión de las consecuencias que se obtendrían una vez adoptada alguna propuesta, tomada alguna estrategia, o aplicado algún método para resolver lo planteado.

Interpretando lo anterior, y de manera complementaria, es necesario construir una teoría educativa que soporte la realidad, la matemática y las competencias personales y sociales como factor de cambio. Con esta teoría se debería promover un currículo y una didáctica que les sean compatibles y coherentes con la vida (individual y social) del estudiante. Así se acepta la modelación como teoría.

Adicionalmente, el contexto didáctico se extiende a un contexto curricular cuando se conjugan los propósitos (proposiciones), los conceptos (la teoría) y los procedimientos (las actividades), y se asumen como una innovación curricular. El factor que coloca, en un mismo propósito a estudiantes y docentes, en ese contexto curricular, es el diseño de algún dispositivo o constructo similar al que se realiza en el ejercicio profesional. Siendo esta contextualización una “… aplicación, ejecución y evaluación de un resultado o producción creativa que mejore o cambie de manera orientada e intencional los resultados, procesos o productos de algún hecho humano” (Hernández, 2013, p. 12).

Modelación

De otra forma, también interviene la modelación. Ella se comprende como el método para estudiar el hecho educativo, además como herramienta didáctica. Se la entiende, además, como un proceso que se activa ante un problema o una realidad, y se representa de alguna forma el comportamiento de los elementos que en dicha realidad se manifiestan. En ocasiones se le llama modelización, y se desarrolla en ambientes donde se conocen los elementos que componen lo que se desea representar (Biembengut y Hein, 2001). Del proceso mismo se obtiene un modelo como producto, el cual puede ser icónico, matemático (algebraico, geométrico, etc.), gráfico, pictórico, físico, sistémico, literario, etc.

De manera consecuente con lo planteado, lo que formularon Niss, Blum y Galbraith (2007) define al mundo real, como el mundo, que se considera al plantear una situación, fuera de las matemáticas, y conceptualiza además al mundo extra-matemático como una manera de indicar qué parte de ese “mundo real” es relevante a un asunto o problema particular y, en consecuencia, se supera la visión de aplicación para convertirla en una nueva construcción empírica y cognitiva. El tránsito entre esos mundos es cíclico y se le llama ciclo de modelación. Pero este ciclo no es ordenado de modo alguno, él se recorre de diversas maneras cuando se está resolviendo un problema o cuando se diseña o construye algo.

Este proceso de modelación se caracteriza porque es aproximado, predictivo, envolvente, interactivo, sistémico y de simulación, entre otras características. Esto se explica porque, el proceso se muestra amigable y con una lógica centrada en procesos de comunicación, con acercamiento a la realidad próxima, y por la interacción física de los estudiantes-docente-contexto.

Aproximado (no exhaustivo)

El modelo que se obtiene en este proceso describe una parte de la realidad, al menos a juicio de quien lo diseña, se trata siempre de que en él aparezcan todos sus elementos y sus partes actuando todos como lo harían en situación real. Sin embargo, por la complejidad de lo que se desea modelar o la sencillez de las interacciones descritas en el modelo, o por las dimensiones del modelo, este no siempre se comporta como en la realidad. Lo que indica que debe considerarse algún factor no contemplado antes, que debe ser interpretado en contexto y en conocimiento de su inexactitud, etc. O también debe ser reacondicionado de manera sustancial, mostrando así algún hecho que no había sido considerado como cierto o falso en sus elementos. Utilizando una analogía en términos algebraicos, se puede afirmar que hay un isomorfismo entre la realidad (o una parte de ella) y el modelo.

Predictivo (por atributos)

El proceso genera resultados y respuestas no aleatorios, el modelo es entonces un mecanismo que permite describir eventos y propiedades inherentes a la naturaleza de los elementos emulados. En consecuencia, las manifestaciones del modelo, cuando este funciona, predice resultados a través de los atributos que de él se conocen. Una forma de conocer los elementos del modelo y de evaluar su funcionamiento es la del reconocimiento, ensamblaje y evaluación teórica de los atributos de los elementos reales que se desean emular.

Envolvente (holístico)

No sólo se representa algún aspecto de la realidad que se desea mostrar a través del modelo. También se representan las relaciones, los acoples entre los elementos diversos que lo componen, sus efectos externos, las fuerzas y energía que se consume, etc. Todo debido a lo exhaustivo que debe ser el modelo obtenido. Las interacciones, por tanto no deben ser casuales, sino causales, propositivas y holísticas (sin olvidar su carácter aproximado).

Interactivo (sensorial y ergonómico)

Lo que se construye por medio del proceso de modelación y en contexto (real y didáctico), debe ser percibido o constatado sensorialmente. El objetivo es contribuir con el incremento de la calidad de vida de las personas y de toda la sociedad a la que está dirigido el producto empírico final. O en todo caso, lograr un esquema didáctico que sirva como plataforma para que el estudiante aprenda. En consecuencia el estudiante debe insertarse adecuadamente en esta planificación, así requiere ser respetado y considerado como usuario por excelencia de los resultados. El innovador debe acomodar el modelo, producto de este desarrollo, ajustado al ser humano, adaptándolo fisiológicamente para que no se afecten, ni la naturaleza ambiental, ni la naturaleza humana.

Sistémico (hermenéutico y dialéctico)

Para que el modelo que se obtenga corresponda a la realidad y de respuestas adecuadas a esa realidad, se debe interpretar y reproducir la esencia vital de sus componentes, haciendo cumplir a todos ellos un propósito y acoplándolos para responder adecuadamente. Se atiende al objetivo general cubriendo, sin fractura física de sus elementos ni incongruencias lógicas en sus funcionamientos, los objetivos parciales o específicos de sus partes. Al hacer que este sistema funcione en el contexto y en medio de la realidad física preestablecidos, se enuncian tesis, se revelan sus contrapartes y se manifiestan las conclusiones.

De simulación (representación medible o sensible)

El profesional en particular y el estudiante en general, se benefician de un modelo cuando al suministrarle entradas, datos o pruebas físicas, da como resultado información, que en línea o tiempo real, permite decidir y reconocer opciones para la actuación y la toma de decisiones. El modelo brinda magnitudes y de manera acorde al diseño, muestra lo que ocurre al cambiar parámetros o datos, que indican la sensibilidad y efectividad del modelo, y así también demuestra su utilidad.

Entonces este proceso se transforma en otros que desarrollan habilidades y destrezas que se exponen en las acciones, en las actitudes (reconociendo las aptitudes) y en las producciones concretas de los estudiantes participantes de la modelación intencionada y dirigida por el docente.

Para Gómez (2005) y Mendible y Ortiz (2007a), se justifica el uso de la modelación ya que en este proceso se establecen interfaces relacionales con la “interdisciplinariedad” al servirle a diferentes carreras, las cuales pueden consultarse entre ellas. Entonces, por medio del contexto, y por el uso de las matemáticas a través de los conceptos matemáticos, más que un uso simple de conocimientos conceptuales y operacionales de las matemáticas, se reconocen nuevas maneras de producir o desarrollar soluciones.

Para que este mecanismo aproveche las características del medio donde se desarrolla, Mendible y Ortiz (2007b) y Cruz (2010) dicen que la modelación se da en esa realidad contextualizada, donde se gesta el acto creativo. Por esto, comprender el mecanismo de creación real, es tanto más urgente que adquirir y manipular la tecnología que lo facilita. Ante esta circunstancia, las Universidades Latinoamericanas, deberían aceptar el reto de distinguir esta necesidad, y tendrían que tomar posición respecto al acto creativo. En el caso de la ingeniería, en palabras de Ayuga, González y Grande (2010),

> Se debe prestar atención a la praxis (la gestión de la calidad, habilidades de comunicación, trabajo en equipo, ética profesional, etc.) y a la técnica (diseño, creatividad, métodos de resolución de problemas, etc.), lo que combinado con la educación científica (fundamentos), que predomina en la actualidad en la mayoría de las ingenierías, y una más adecuada conexión entre la tecnología y la sociedad, aumentaría la eficacia de las actividades del ingeniero en el cumplimiento de su propósito: producir cosas útiles en beneficio de la humanidad.(p. 6)

En este discurso, los participantes, docentes y estudiantes, pueden y deben incorporar valores de solidaridad, de compromiso moral y social (Ramos, 2006). Para lograr esto, se requiere que los ejemplos dados en clases estén contextualizados, con los que el estudiante llegue de manera gradual a la destreza deseada, que al resolver problemas opere como lo sugieren los ejercicios (al principio en asignaciones en las cuales se realiza comparación con otros ejercicios ya resueltos, para que puedan notar diferencias y similitudes, relaciones, invariantes numéricos o conceptuales) mostrando lo relevante y la utilidad del proceso en otras aplicaciones, sugiriendo analogías con otras circunstancias problemáticas Así se ejemplificaría al proceso y no al modelo. Entonces para la modelización se han de centrar los esfuerzos en construir experiencias, como proceso individual de desarrollo de competencias matemáticas, y no sobreestimar las particularidades del problema o del modelo a ser construido. Sin olvidar que la simulación de la situación debe acompañarse de toma de decisiones, asociadas siempre de principios y valores, que preserven al ambiente, con respeto por los derechos humanos y la observancia de normas de seguridad (industrial, personal y sanitaria).

La sociedad se beneficia porque el modelo responde a las necesidades humanas. Al respecto Niss (2001) dice que educativamente al hacer una pregunta, "las personas quienes las formulan las necesitan seriamente o quieren respuestas, de aquello que no poseen en progreso" (p. 77). Se debe contestar lo relevante de las preguntas que se generan por necesidad, aun cuando tales preguntas aparezcan en forma implícita o superficialmente. Como por ejemplo, el docente en un ambiente académico e investigativo, pregunta ¿En cuál fase del proceso de modelación los estudiantes hallan los más importantes obstáculos? Según Donolo, Chiecher y Rinaudo (2004) el contexto ayuda para resolver estas situaciones. Se pueden diseñar contextos a través del uso de estrategias de aprendizaje (procedimentales y facilitadoras), estrategias cognitivas (de repaso, elaboración, organización y pensamiento crítico), estrategias de manejo de recursos (organización del tiempo y ambiente de estudio, la regulación del esfuerzo, el aprendizaje con pares y la búsqueda de ayuda). Por último, se deben construir estrategias metacognitivas cumpliendo los tres procesos generales de planeamiento, control y regulación. En suma, hay construcciones para el contexto que se hacen en los momentos de diseño colaborativo, con lo cual el estudiante, guiado por el docente, es capaz de conocer un problema, de interesarse por él, construir algo que de manera empírica permita resolverlo y que pueda exponer sus ideas.

Modelación en la formación de competencias

Hay efectos en lo didáctico que se relacionan con las características de la modelación. Al hacer participar a los estudiantes en el diseño de modelos que representen una situación o fenómeno, enmarcada en el currículo real, se les permite el uso del lenguaje oral (verbalización), matemático (matematización) y social (socialización). Y con estas estructuras, cada estudiante logra aproximar soluciones que deben ser procesadas y reprocesadas hasta que aparezcan todos sus elementos constitutivos, tal como en la situación real. La complejidad de la realidad se supera con la complejidad del lenguaje que la representa e interpreta. Las dimensiones y magnitudes físicas se acercan a los conceptos y teorías lo que permite un mejor acercamiento a la realidad (Vygostky, 1995), o sea satisfecha a los niveles deseados. El isomorfismo entre el modelo y la realidad se valora cuando las respuestas del modelo presentan analogías con las manifestaciones reales esperadas con datos reales. Estas respuestas son relativas, no se esperan respuestas idénticas, se esperan respuestas apropiadas y ajustadas al modelo. La labor académica y formativa se nutre de esta relación Docente-Estudiante-Modelo, la cual expresa una analogía con la relación compleja Ciencia-Profesión-Realidad.

Asociado a cualquier prueba procesal, está lo predictivo del modelo. No hay respuestas aleatorias del modelo que no estén acotadas o reducidas. En la naturaleza de los elementos que constituyen al modelo hay atributos que permiten reducir las respuestas a eventos controlados. En la práctica educativa estas consideraciones se incorporan por medio de la discursiva y la conceptualización. De esas propiedades inherentes con los propósitos y procedimientos que hacen que el modelo se active, el docente establece vínculos entre la realidad y el aprendizaje del estudiante.

En la visión totalizadora y holística que se describe más arriba como una característica "envolvente". El docente y los estudiantes deben requerir, con cada prueba del modelo, que se den de manera simultáneas todas las relaciones que la complejidad de la realidad permita. Para operar con esta fase del diseño didáctico y de contextualización, el docente construye niveles de logros intermedios y registra cada incorporación al modelo con el propósito de anexar cada atributo novedoso. Cada variable del modelo debe ser evaluada de manera interrelacionada con las otras variables, en lo experimental o lo conceptual (teóricamente).

El fin del modelo es un factor que interviene decididamente. Siempre el fin está asociado al bienestar del ser humano, y por eso debe acomodarse a la satisfacción de necesidades humanas, y es relativo al confort para operar o beneficiarse de él. Es decir, el modelo debe ser ergonómico y debe contemplar la sensibilidad de los posibles usuarios del modelo. Para lograr esto en el currículo, se sugiere que sea la participación democrática, en el seno de cada equipo de trabajo, el mecanismo mediante el cual los participantes decidan acerca de esos aspectos. La intervención contempla un abanico de posibilidades, desde la selección de los elementos básicos del modelo hasta la evaluación de esa incorporación.

El modelo creado debe responder a los requisitos de la realidad. Al ser interpretado, colocando sus partes en funcionamiento, él permite al usuario recrear y reconstruir esa realidad para que con él se ilustre una forma de intervención en la naturaleza de manera dialéctica. En consecuencia, se podrían efectuar cambios en el currículo que de otra forma no se efectuarían, construyendo soluciones en lugar de calculárselas.

También se puede evaluar el desempeño del modelo, cuando el criterio valorativo es la satisfacción de la representatividad y se logra la evidencia de este modelo como mecanismo para la toma de decisiones. El contexto debe ser construido al considerar que el modelo es sensible y efectivo en el momento de su aplicación. Incorporando así lo investigativo y experimental como elementos curriculares añadidos a lo comunicacional y democrático del equipo que diseña soluciones.

Sin embargo, el intercambio de conocimientos que estos procesos generan, solicitan de parte del docente un orden y una estructura. Se debe poseer herramientas curriculares (conceptos, principios y procedimientos) (Stenhouse,

1991) que de manera intencionada intervienen en el proceso, lo cual se logra a través de los organizadores del currículo. Adicionalmente, Rico (1998) sugiere algunos criterios al considerar los organizadores del currículo, tales como los errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática, la diversidad de representaciones, la fenomenología y las aplicaciones del conocimiento implicado, la diversidad y naturaleza de los materiales, y la evolución histórica de los conceptos. Esos organizadores, deben ser considerados como una serie de actividades entre los elementos del currículo, reveladoras de relaciones, antes de que sean tratadas en clases. Este proceso es una etapa exploratoria, tanto para crear el contexto, como para el diseño de estrategias de inserción en innovación, con una visión de modelación.

De esta forma se comienza reconociendo que la profesión, la disciplina académica y el currículo son elementos que intervienen en un mismo proceso, los cuales permiten acercamiento y aproximación intencionada a la realidad (Stenhouse, 1991; Schön, 1992). Así entonces, el currículo se presenta como órgano vivo de la acción pedagógica y se le considera integrador, socializador, motivador, guía, propiciador de actitudes referentes a la crítica, así como también orientador de los procesos de investigación y de promotor que activa el componente ético de las personas que están a su alcance (incluyendo a quienes lo diseñan).

Según Fitzpatrick (2007), el currículo contiene una carga etnográfica, psicológica y administrativa que puede ser interpretada dialécticamente, que se consolida en la acción. En consecuencia, la transferencia de conocimientos no puede estar asociada sólo a una administración curricular de los contenidos, a proposiciones que desde una cátedra se puedan impartir, aplicar y evaluar. La realidad debe ser convocada y representada, para que a través de ella se logren, en contextos adecuados, cambios de conductas, actitudes, etc. En este proceso se deben desarrollar habilidades y destrezas que se enuncian como competencias en modelación.

Conclusión

Los cambios científicos son el resultado del esfuerzo por comprender mejor el medio que nos rodea. De la estructura conceptual, los procedimientos o tareas profesionales se manifiestan estos cambios de manera holística. El éxito del estudiante, en el desempeño profesional futuro, se rige por el criterio de que la realidad debe ser contextualizada (coincidiendo con los atributos otorgados por Stenhouse (1991)). Existe una aproximación al desempeño deseado de modelización en cada estudiante cuando se consideran las características del modelo diseñado por ellos. Visión ésta en la que el docente lleva registro de las actividades del curso y cuando al evaluar las actividades desarrolladas por el estudiante, se verifican las características del trabajo a través de los atributos que emergen del modelo. Se crean de esta forma contextos por medio del ambiente preparado para simular la actividad profesional. En ese registro se toma nota de cómo surgen los conceptos apoyados en las herramientas matemáticas.

Finalmente, con la modelación, al diseñar un modelo se prepara el ambiente al contextualizar, se conceptualiza por medio de la matemática y se comunican las ideas a través de diferentes formas de representación.

Referencias

Ayuga, E., González, C. y Grande, M. (2010). *Análisis de competencias en el Grado de Ingeniería Forestal para su adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior. Formación Universitaria* [Revista en línea], 3(3), 3-14. Disponible: http://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v3n3/art02.pdf

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2001). Modelling in Engineering: Advantages and Difficulties. En M. Niss, W. Blum y I. Huntley (Eds.), *Modelling and Mathematics Education. ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 415-423). Londres: Horwood Publishing Limited.

Contreras, L. (2013) Docencia de las matemáticas. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 30(3), nº 85, 117-121.

Cruz, C. (2010). La enseñanza de la Modelación Matemática en Ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V.*, 25(3), 39–46.

Donolo, D., Chiecher, A. y Rinaudo, M. C. (2004). *Estudiantes, Estrategias y Contextos de Aprendizaje Presenciales y Virtuales*. Presentado en el Primer Congreso Virtual Latinoamericano de Educación a Distancia, Argentina.

Fitzpatrick, B. (2007). A question of balance critical incidents, tensions, and curriculum change. En P. Taylor y J. Wallace (Eds.), *Contemporary Qualitative Research: Exemplars for Science and Mathematics Educators* (pp. 105–115). New York: Springer.

Hernández de Rojas, U. (2013). *Innovaciones Educativas. Metodología para el cambio*. Maracay, (S/E).

Gómez, J. (2005). *La Ingeniería Como Escenario y Los Modelos Matemáticos Como Actores* [Documento en línea]. Conferencia dictada en el XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática. "Matemáticas para el siglo XXI", España. Disponible: http://www.ma4.upc.es/~andreu/

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007a). Estudiantes de ingeniería y Competencias en Modelización Matemática. Una aproximación crítica al estado del arte. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.), *Memorias VI Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 605-614). Maracay.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007b). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de la Matemática*, 12 al 16(1), 133-150.

Morin, E. (1990). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona, España: Gedisa.

Niss, M. (2001).Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. En M. Niss, W. Blum y I. Huntley (Eds.), *Modelling and Mathematics Education. ICTMA 9: Applications in Science and Technology* (pp. 72-88). Londres: Horwood Publishing Limited.

Niss, M, Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Ramos, G. (2006). La formación humanística como componente de la formación integral del profesional universitario. *Educação em Questão*, 27(13), 7-27.

Reid, D., Knipping, C. y Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, 6(1), 1-10. Disponible: http://hdl.handle.net/10481/16011

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 1(1), 22-39.

Schön. D. (1992). *La Formación de Profesionales Reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. (Temas de educación, Nº 28). Barcelona, España: Ediciones Paidós.

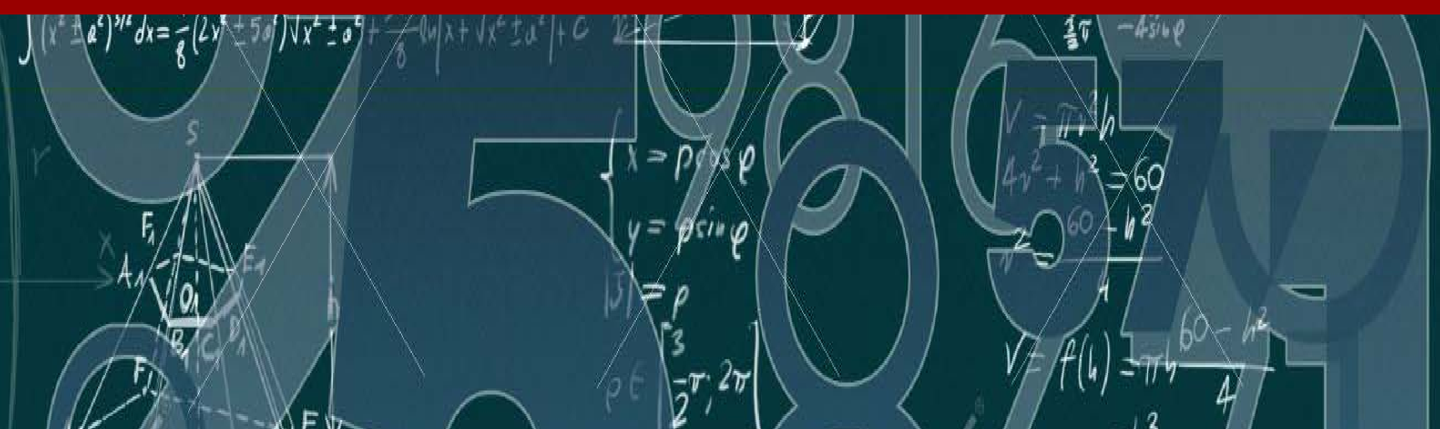
Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum*. (Tercera Edición). Madrid: Ediciones Morata.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. (Nº. 30, serie Cognición y desarrollo humano). Barcelona, España: Ediciones Paidós.

Arnaldo Mendible Sánchez.

Profesor de Matemáticas, Mención Matemáticas, egresado del Instituto Pedagógico de Caracas (UPEL-IPC). Especialista en Sistemas de Información, por la Universidad Católica Andrés Bello (UCAB). Es Profesor Agregado a Dedicación Exclusiva en la Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada (UNEFA). Investigador en el área de Educación Matemática en la temática de modelización y formación de ingenieros. Ha presentado trabajos en foros nacionales e internacionales. Ha realizado publicaciones en el ámbito nacional e internacional.

El significado del objeto personal función en las prácticas operativas y discursivas de estudiantes universitarios



Ana Beatriz Ramos P

El significado del objeto personal función en las prácticas operativas y discursivas de estudiantes universitarios

Introducción

Es lugar común, entre los docentes de la Cátedra “Introducción a la Matemática”, emitir comentarios referidos a la crisis conceptual, en cuanto al conocimiento sobre las funciones que expresa el alumnado en la unidad curricular referida a dicho contenido temático.

Los profesores suelen realizar expresiones de asombro sobre la pobreza conceptual que manipulan sus alumnos.

Al respecto dicen: “Los alumnos de la facultad como que viven en otro mundo, pues yo les explico y formulo el concepto en estos términos y, ellos escriben en sus respuestas, tal cantidad de barbaridades”.

Lo que está sucediendo como se observa en el comentario anterior, no es que el alumnado viva en otro mundo, lo que realmente sucede, es que hay una fisura, una brecha, que es importante disipar, entre el significado del objeto matemático introducido por el docente y el nuevo significado del objeto personal construido por el alumno.

En la medida que se pueda entender esta brecha y el porqué de la misma, será posible acercar el significado institucional pretendido e implementado al significado personal del alumnado.

Objeto personal e institucional

Ahora bien, ¿qué se entiende por objeto personal y objeto institucional? En el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) se adopta un cierto pragmatismo puesto que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado.

Dada su importancia, es necesario intentar precisar lo que se entiende por práctica. Una primera definición de práctica, en sentido amplio, es la siguiente: manipulación de ostensivos y del pensamiento que la acompaña. Las prácticas como las que se realizan en una institución escolar tienen un componente público (hay manipulación de ostensivos y, por tanto, observables) y un componente privado (manipulación de representaciones mentales no ostensivas y no observables). Si bien, en teoría, podríamos considerar prácticas que sólo tienen un componente -por ejemplo la manipulación inconsciente de ostensivos, o bien una persona que sólo piensa- lo normal es que dichas prácticas incorporen estos dos componentes. Aunque esta definición de práctica es muy general, cuando la contextualizamos en la actividad matemática permite definir las prácticas matemáticas de la manera siguiente (Godino y Batanero, 1994): "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334).

Los objetos personales

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan lleva a considerar que lo que hay entre el estímulo -campo de problemas- y la respuesta -sistema de prácticas- no es una caja negra; muy al contrario, es en este lapso donde tiene lugar el proceso nada mecánico de simbolización por el que las experiencias se codifican significativamente, se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto, para dar lugar a objetos matemáticos personales que, según Godino y Batanero (1994), son: *"emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas"*(p. 335). Estos objetos personales van cobrando forma -van emergiendo- en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones sobre el objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales (realizar prácticas discursivas sobre los mismos), conduce a una vía de investigación en Didáctica de las Matemáticas de gran relevancia. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de Matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce con la denominación de máxima pragmática, la que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994) para definir el significado de un objeto personal O_p: *"Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado"* (p. 341). Según tal definición, el objeto personal supone haber establecido una conexión entre acciones potenciales y fines, conexión que es inteligente y, por tanto, está mediada simbólicamente.

Asimismo conviene observar que, dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. El hecho de considerar el objeto personal como un "emergente" y su significado de manera "holística" hacen que lo que realmente es relevante, es la existencia de prácticas (significativas) realizadas por el sujeto en las que interviene alguna representación del objeto. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar. De lo dicho antes se podría pensar que la relación entre el objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante para su realización se considera una relación de causa-efecto en la que el objeto personal sería la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos). Contrario a este punto de vista, se considera conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha. Puesto que para realizar una práctica primero hay que valorar y decidir lo que va a hacer, después se tiene que decidir qué acción es la más indicada y, por último, se ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final.

Objetos institucionales

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista. Por este motivo en el EOS (Godino y Batanero, 1994) se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales. Para Godino y Batanero una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Con relación al objeto institucional interesa resaltar los siguientes aspectos: (1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales. Cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. (2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En Godino y Batanero (1994) también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional O_I: *"Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado"* (p. 340).

Para el EOS, la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que, obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. Para El EOS la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace (y por tanto posibilita) en "la evaluación de los conocimientos de los alumnos".

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: (1) S*ignificado institucional de referencia*, cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas"; acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas histórico-epistemológico-didáctico que se designa como significado institucional de referencia del objeto. (2) S*ignificado institucional pretendido*, sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional. (3) S*ignificado institucional implementado*, sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes. (4) S*ignificado institucional evaluado*, colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes.

Objetivos de la investigación

Objetivo General:

Analizar el objeto matemático personal función que se manifiestan en las prácticas operativas y discursivas de los alumnos cursantes de la asignatura "Introducción a la Matemática"

Objetivos específicos:

1 Diseñar un instrumento para recopilar y categorizar el objeto personal matemático función que utilizan los alumnos en sus prácticas cuando validan el significado de su objeto matemático personal función.

2 Analizar las respuestas recopiladas en el instrumento para entender el significado del objeto matemático personal de función presente en el alumnado de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo.

Metodología

La metodología utilizada para esta investigación se ubica dentro del modelo cualitativo, estudio de casos. Por otra parte, se le considera una investigación de campo a nivel descriptivo, puesto que proporciona una perspectiva completa para la recogida de datos y el posterior análisis de la información. También es semiótica pues estudia los significados de los objetos personales. Las características metodológicas se enmarcan dentro de una investigación de campo, ya que, según Cerda (2000) "se realizan en contacto directo con la comunidad, grupo o personas que son motivo de estudios (…) Prácticamente todo el proceso de recolección de datos a nivel social" (p.232). El nivel es descriptivo porque describe las características y detección de regularidades empíricas que se presentan en el fenómeno estudiado.

Instrumento para la recogida de la información aplicado al alumnado de la Cátedra

Se elaboró un cuestionario constituido por seis (6) ítems. Los dos primeros ítems fueron seleccionados, con algunas variantes del estudio realizado por Ruiz Higueras (2000), quién a su vez realiza una selección de las investigaciones de Vinner y Dreyfus (1989) y Tall y Bakar (1992), de ejercicios y problemas incluidos en libros y planes de estudios. La investigadora consideró de vital importancia colocar un ítem que recopilase lo que los estudiantes entendían por función. Por ello, se le agrega una pregunta referida a la definición de función y se les solicita que introduzcan un ejemplo libre, concretamente se trata de la interrogante Nº 3. Otras de las interrogantes tomadas en consideración en el cuestionario fueron los últimos tres ítems tomados y modificados del texto de Bujosa, Canadilla y Font (1997), el cual nos fue de mucha utilidad para otro aspecto de la investigación que por razones de espacio no analizamos en este artículo. Es importante aclarar que en este capítulo sólo se ha tomado el análisis de las tres primeras interrogantes.

Una vez aplicados los cuestionarios, se pasa a la revisión de los mismos. Por cada interrogante y según las respuestas se construyen unas categorías que permiten ir colocando las respuestas para abordar al final el significado del objeto personal función.

Características del cuestionario aplicado al alumnado para realizar una revisión del objeto personal función

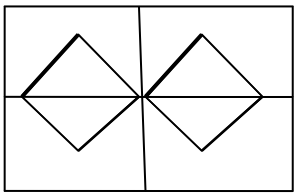
El cuestionario aplicado a los alumnos(as) fue construido en correspondencia con el programa de la asignatura. Consta de seis (6) ítems, de los cuales solo mostraré los tres primeros, que son los que vamos a analizar en este resumen de investigación. Dichos ítems se han distribuidos de la siguiente forma:

- Ítem número 1: contiene cuatro (4) gráficas para que los alumnos argumente en cada caso si es o no una función y el por qué de su respuesta.
- Ítem número 2: se presentan cinco expresiones algebraicas; en cada caso, debe argumentar si se trata de una función o no.
- Ítem número 3: esbozar según los conocimientos adquiridos la definición de función real y colocar un ejemplo, libre. Explicando el por qué de su respuesta.

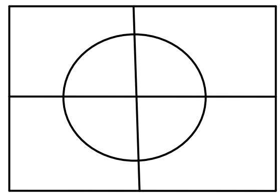
Cuestionario

1. Te presentamos a continuación varias figuras. Debes decir, para cada una de ellas si se trata o no de la representación gráfica de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

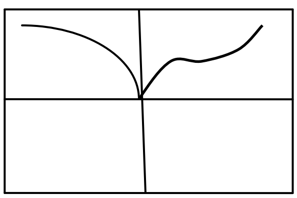
1A



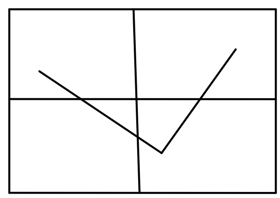
1B



1C



1D



2. Te presentamos varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

2A)

$$\mathbf{f(x)=}\begin{cases} 3x - 2 \ \text{ si } \ x \in \mathbb{R},\ x \leq 4 \\ 0, \ \text{ si } x \in \mathbb{R},\ 4 < x < 6 \\ 2 \ \text{ si } \ x \in \mathbb{R},\ x \geq 6 \end{cases}$$

2B) $x^2 + y^2 = 9$

2C) $y^2 = 2x - 4$

2D) $y = 5$

2E) $y = 5/x + 1$

3. Esbozar según los conocimientos adquiridos la definición de función real y colocar un ejemplo, libre.

A continuación, se presentan las características y las categorías establecidas para analizar cada uno de los ítems del instrumento.

Interrogante 1: Determinación de funciones a partir de diferentes gráficos. Estos ejercicios plantean casos de relaciones-funciones o de relaciones. El alumno puede visualizar fácilmente si se trata o no de una función, con el manejo del concepto de función más cómodo o más próximo a él. Puede hacer uso, del concepto de unicidad "una única imagen para cada elemento del dominio", o bien puede utilizar otro concepto aprendido. El objetivo es conocer en cuáles categorías de la noción de función se ubican y si, además, son consistentes en el uso posterior de dicho concepto en problemas de funciones que impliquen gráficas u otras características.

Categorías establecidas en torno a esta interrogante nº 1 (1A, 1B, 1C, 1D)

1.1: *Aplicación*: En esta categoría se ubican todo aquellos alumnos que asumen, al observar una gráfica dada, que dicha gráfica es una función o no lo es, considerando ésta como una correspondencia unívoca.

1.2: *Criterio de la Recta Vertical*: En esta categoría se reúnen todos los estudiantes que justifican sus respuestas frente a una gráfica dada utilizando el criterio de la recta vertical.

1.3: *No argumenta o No Explica*: En esta categoría se ubican todos aquellos alumnos que se limitaron a sólo afirmar o negar, según el caso si era o no una función la gráfica dada.

Interrogante 2: Determinación de funciones a partir de diferentes expresiones algebraicas. Este problema, consta de un ejercicio para identificar funciones a través de una expresión algebraica. Los alumnos deben identificar cada caso y, además, justificar sus respuestas. Nos interesa analizar el aspecto argumentativo que encierran sus respuestas. La idea es recoger de sus argumentaciones una parte muy importante de las concepciones que poseen sobre la noción que manejan de función en ejercicios de este tipo.

Categorías establecidas en torno a la interrogante nº 2 (2A, 2B, 2C, 2D, 2E)

2.1: *Aplicación:* En esta categoría se agrupan todos aquellos estudiantes que utilizaron el criterio de unicidad para determinar si la expresión dada es o no es una función

2.2: *Expresión Algebraica*: Cuando los alumnos basan sus respuestas utilizando la forma de la expresión algebraica; es decir compara la expresión dada con una conocida por ellos como función o no, entonces se ubican en esta categoría.

2.3: *Dominio–Imagen*: Aquí se ubicaron a todos aquellos alumnos que justificaron sus respuestas argumentando la función sobre la posibilidad de darle valores a *x* para que valores tome la *y*.

2.4: *No Responde*: En esta categoría se ubican los alumnos que sólo afirman o niegan para cada caso, si la expresión algebraica estudiada es o no es una función. También se han colocado en esta categoría todos aquellos alumnos que no responden la interrogante planteada

Interrogante 3: expresar el concepto de función real. Con esta interrogante se pretende ubicar el concepto de función presente en los argumentos del alumnado. La idea de la interrogante nº 3, es rastrear la noción de función que manipula el estudiantado para así precisar el concepto implícito

Categorías establecidas en torno a la interrogante nº 3

3.1: *Función como correspondencia entre elementos de dos conjuntos*. En esta categoría se ubican todos aquellos estudiantes quienes consideran a la función como una correspondencia entre elementos de conjuntos. Definiéndose, para ello, dos conjuntos: uno, llamado de partida y, el otro, de llegada.

3.2: *Función como pares ordenados*. En esta categoría se ubican todos aquellos alumnos(as) que consideran que una función es un conjunto de pares ordenados.

3.3: *Función como una relación entre elementos del dominio y sus imágenes rango*. En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos que utilizan la definición de función como la relación entre elementos del dominio y sus imágenes en el rango.

3.4: *Función como expresión de una línea en el plano cuyos elementos del dominio le corresponden una imagen en el rango*. En esta categoría se sitúan todos aquellos alumnos(as) que consideran la función como el caso particular de una línea recta.

3.5: *Función como una expresión algebraica o gráfica*. En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos(as) que consideran que una función se define únicamente de forma gráfica o como una expresión algebraica.

3.6: *No responde*. En esta categoría se agrupan todos aquellos alumnos(as) que no dan respuesta alguna a la interrogante planteada

Análisis e Interpretación de los Resultados

En cuanto a la interrogante 1:

El alumnado responden ubicándose mayoritariamente en la categoría 1.1: Aplicación. *"Las figuras 1A y 1B no son funciones, ya que al darle un valor a x se obtienen dos imágenes en el eje de las y".*

Un grupo minoritario de alumnos(as) (10%) se ubicó en la categoría 1.2: Recta Vertical. *No son funciones las figuras 1A – 1B, "Porque si trazas una recta vertical al eje x obtienen dos imágenes".*

Un (20%) del alumnado se ubicó en la categoría 1.3: No Responde. Ya que, no intentan resolver la interrogante o no argumentan sus respuestas.

En cuanto a la interrogante 2:

El 40% de los alumnos ubicó sus respuestas dentro de la categoría

- 2.1: Aplicación Ejemplo: *La Expresión algebraica"2B": $x^2 + y^2 = 9$, no es una función, porque dará dos valores o imágenes para un mismo valor de x.*

- El 40% de los estudiantes se ubica en la categoría Dominio-imagen, porque sus respuestas se establecen como una especie de ábaco; es decir, le da valores a la x para obtener valores para la y. El 10% de los alumnos ubicó sus respuestas dentro de la categoría:
- 2.2 Expresión Algebraica. Ejemplo: La interrogante 2E es una función pues su fórmula y = 5, es la de una función constante.
- En el 10% se agruparon todos aquellos alumnos que no explican o no argumentan sus respuestas.

En cuanto a la interrogante 3:

Aproximadamente, un tercio (30%) de las respuestas del alumnado se concentró en la definición de función, como expresión de una línea recta en el plano (Categoría 3.4.). Un 24% de las respuestas del estudiantado se concentraron en la definición de función como una expresión algebraica o gráfica (3.5).

Un 20% de las argumentaciones de los alumnos definen función como una relación entre elementos del Dominio y sus imágenes (rango). En un porcentaje del 12% se ubicaron las respuestas en torno a las argumentaciones:

a) Correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Ejemplo: *Una función es una correspondencia entre dos conjuntos uno de partida y otro de llegada.*

b) No responde.

En un índice menor (2%) se concentran las respuestas en la definición de función como par ordenado (x, y).

Conclusiones

Las argumentaciones expresadas por los estudiantes a los problemas del instrumento (cuestionario), ofrecen un perfil característico de estos alumnos, que sirven a la postre para *analizar el objeto función* presente en el repertorio cognitivo de dicho grupo desde el punto de vista de las destrezas, uso continuado de un criterio o argumento, dificultades frente a un tipo de problema, entre otras consideraciones. A la vez que permite medir el grado de competencia que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas no del todo rutinarios. Los resultados obtenidos nos sirven para verificar que existe una brecha entre los objetos matemáticos presentados por el docente y los objetos matemáticos creados por el estudiante.

Resulta importante destacar que la interrogante basada en la definición de una función real se exaltó como la más valiosa del estudio, la misma, permitió indagar en profundidad muchas de las dificultades que presentan los alumnos en la construcción del objeto personal función que, a simple vista, no se puede percibir. El hecho de que las argumentaciones del alumnado presentaran tantas ambigüedades permite señalar que existen grandes limitantes frente al concepto función. Las respuestas mayoritarias se concentran en la argumentación de definir la función como expresión de una línea recta en el plano (30%). Es evidente, que esta relación línea recta-función es muy marcada y presenta una dificultad importante, al momento de poder trasladar o ampliar el concepto de función, lo cual indica que existe una restricción substancial de dicho concepto.

Referencias

Bujosa, J., Canadilla, M. y Font, V. (1997). *Matemàtiques aplicades a les Ciencies Socials 1*. Barcelona: Castellnou.

Cerda, H. (2000). *Los Elementos de la Investigación*. Bogotá: El Búho.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Ruiz Higueras, L. (2000). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

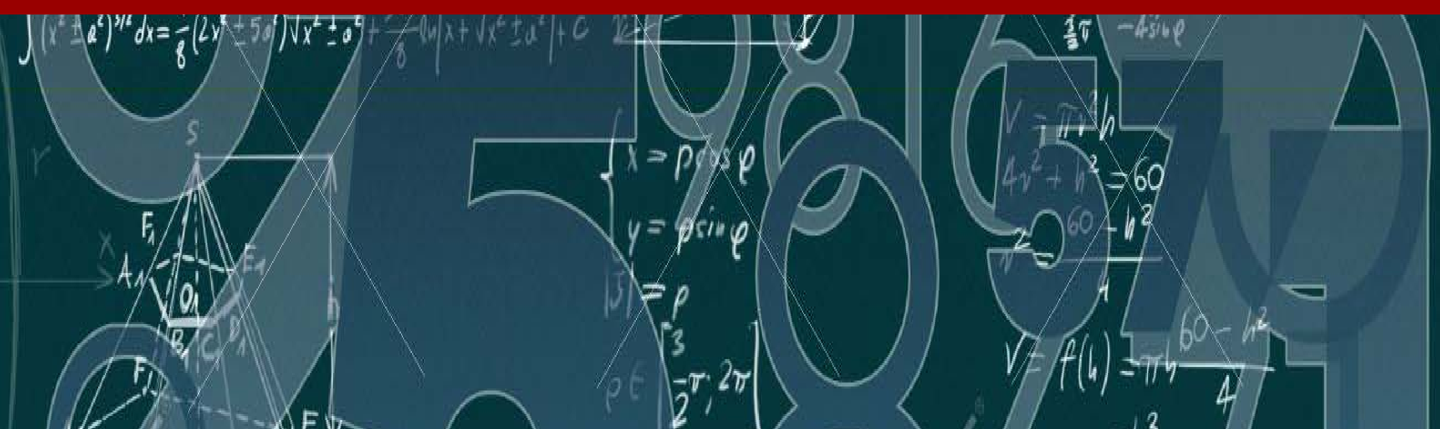
Tall, D. y Bakar. (1992). Students` Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, 23, 1, 39-50.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Ana Beatriz Ramos Pereira.

Doctora por la Universidad de Barcelona (UB), España. Título de la Tesis: "Objetos Personales Matemáticos y Didácticos del Profesorado y Cambios Institucionales. El Caso de la Contextualización de las Funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales". Magister en Educación Superior por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) y Licenciada en Educación, mención Matemática por la Universidad de Carabobo (UC). Es Profesora Titular jubilada de la Universidad de Carabobo. Entre sus publicaciones están: 1) *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales* "*Revista de Educación*", Número 338; y, 2) *Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica*. "La Matematica e la sua didattica", Anno 20, n. 4. Ha presentado trabajos en eventos nacionales e internacionales.

Las actividades matemáticas del Pueblo Wayuu



Hernán Paredes Ávila

Las actividades matemáticas del Pueblo Wayuu

Acción social problematizada

A pesar de que trate de negarse, que a diversas personas el tema le cause escozor, y que lleguen a considerarlo como un tema trillado, político, o fuera de contexto, los hechos históricos hablan por sí solos, no se puede ocultar que desde la llegada de los colonizadores europeos, a lo que hoy se conoce como América, los pueblos originarios de estas tierras han sido exterminados paulatinamente, el exterminio se ha llevado a cabo de muchas maneras, entre ellas está el asesinato de los aborígenes, la destrucción de sus casas, templos y ciudades, el saqueo de sus tesoros, el proceso de imposición cultural, religiosa y el esclavismo. Aunado a esta destrucción del acervo histórico-cultural de los aborígenes se observa el menosprecio que han sentido muchos europeos hacia el indoamericano fundamentada en la “inferioridad” del aborigen y una “superioridad” del europeo como ser humano. Estas pretensiones de superioridad son señaladas por Morales (1995) al decir que “primero fue el invasor español, quien pretendió justificar la dominación colonial, en un primer momento por la supuesta superioridad de la religión cristiana católica y, luego, por la supuesta superioridad racional del hombre europeo” (p. 76).

El aprovechamiento y explotación de los recursos naturales de nuestros Pueblos originarios se acelera en la historia reciente, a partir del aprovechamiento del caucho en el Amazonas, tal y como lo expresa González (2001) se introdujeron nuevos estilos de vida, hábitos alimenticios y de intercambio comercial. Este mismo investigador señala que desde el primer mandato de Rafael Caldera (1969-1974) y específicamente en 1974 con la llamada “Conquista del Sur” se abren las áreas indígenas y sus recursos naturales a los intereses económicos de empresas nacionales y transnacionales. Esta apertura generó múltiples daños ecológicos a las áreas indígenas además de genocidios por parte de los mineros ilegales llamados garimpo en contra de la tribu Yanomami en el año de 1993; Ortiz (2004) señala a su vez que existen múltiples genocidios que quedaron encubiertos.

Este proceso de transculturización e invasión de las costumbres criollas y/o extranjeras sobre las aborígenes ha hecho que desaparezcan de forma paulatina aspectos de mucha importancia para la comprensión de su Cultura, desarrollo y forma de vida, elementos importantes como: organización social, lenguaje, formas de intercambios, ocupación territorial, construcciones, escultura y pintura, se han perdido total o parcialmente. Este proceso descrito por Ortiz (2004) implica dos etapas, primero la pérdida o desarraigo de una Cultura precedente, y segundo la creación de nuevos fenómenos culturales que pudieran denominarse de neoculturación.

Dentro de los aspectos más sobresalientes para la comprensión sociocultural de los Pueblos está la matemática implícita o explícita utilizada por las diferentes Pueblos, así lo refiere D'Ambrosio (2001a) al señalar que "como forma cultural, la matemática y el comportamiento matemático se convierten en parte del desarrollo social. Modos de producción, trabajo de organización social están íntimamente conectados a las ideas matemáticas" (p. 89). Del análisis de los elementos matemáticos se pueden obtener datos tales como: su forma de contar, medir el tiempo, diseñar, organizar, jugar, localizar, representar; sin embargo, a pesar que dichas actividades matemáticas se encuentran inmersas en la Cultura de los diferentes pueblos del mundo, éstas han sido ignoradas en el estudio de las Culturas indoamericanas, muestra de ello lo constituyen la Maya, Inca y Azteca, quienes desarrollaron grandes civilizaciones y que debido a las destrucciones masivas de la cual se hizo referencia anteriormente no han sido apreciadas a plenitud. Igual o peor suerte han corrido las naciones indígenas que poblaron y/o pueblan el territorio venezolano, quienes en su mayoría eran nómadas y ágrafas, lo que dificulta un poco saber a plenitud el desarrollo matemático alcanzado por ellos.

Sujetos sociales que intervienen en el trabajo

Dadas las condiciones del Pueblo Wayuu, pertenecientes a la familia lingüística Arawaka, su gran número poblacional, ubicación geográfica, acceso a su hábitat, material bibliográfico sobre sus costumbres y enlazado éstos a los trabajos de D'Ambrosio (1997) y Bishop (1999), el presente trabajo se centrará en el estudio de las actividades matemáticas del Pueblo Wayuu.

1. Sujetos sociales directos: el investigador, tres (3) Docentes miembros del Pueblo Wayuu, pertenecientes a los Municipios Mara y Guajira del estado Zulia.

2. Sujetos sociales indirectos: Tres (3) Antropólogos y tres (3) Docentes miembros del Pueblo Wayuu (como informantes claves).

Direccionalidad de la investigación

Finalidad

El presente trabajo tiene como finalidad estudiar las actividades matemáticas en el Pueblo Wayuu según la categorización de Bishop (1999) a través de la recopilación de materiales bibliográficos y entrevistas realizadas a docentes Wayuu y antropólogos.

Intencionalidades

1. Identificar las Actividades Matemáticas presentes en el Pueblo Wayuu.
2. Analizar las Actividades Matemáticas presentes en el Pueblo Wayuu.
3. Establecer algunas propuestas que coadyuven al conocimiento y fortalecimiento de nuestros Pueblos Originarios.

Dimensión Espacial

La comunidad Wayuu de los municipios Guajira y Mara, en el estado Zulia.

Ámbito Temporal

La investigación se llevó a cabo entre los años 2008 y 2011.

Enfoque de la Investigación

El presente trabajo se desarrolló bajo una metodología cualitativa, la cual se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas habladas o escritas, y la conducta observable (Taylor y Bogdan, 2002). De allí que, tomar en cuenta lo que dicen las personas es fundamental en el presente estudio, la recolección de datos que permitan esquematizar y conocer a las personas que intervienen en el estudio es vital para el desarrollo oportuno de la investigación. En ella se empleó, como estrategia de recolección de datos, la observación externa, la cual comprende: la revisión bibliográfica y las experiencias que resultaron de la interacción del autor con algunos miembros del Pueblo Wayuu en diversas actividades y entrevistas. Se trabajó a través de informantes claves, entrevistas a profundidad y notas de campo. Se hicieron registros mecánicos (fotografía y grabaciones de audio) y escritos; además, se utilizó el paquete informático ATLAS.ti para el procesamiento de la información recolectada. Para la estructuración de las ideas realizamos triangulaciones en los términos expresados por Taylor y Bogdan (2002).

La Educación Intercultural Bilingüe

Según Pérez (2007), la Educación Intercultural Bilingüe se "implementó en 140 comunidades de 9 Pueblos Indígenas" (p. 21). Esta, según la misma autora, se desarrolló a finales de la década de los setenta del siglo pasado motivada por diferentes factores de carácter social, los movimientos indígenas nacionales y extranjeros, así como la activación de distintos grupos pro indígenas. Por su parte, Mosonyi (2009) nos comenta en apoyo a esto que "los primeros planteamientos sobre Educación Intercultural Bilingüe —allá en los años 1960 y 70— comenzaron a producir un vuelco total, decisivo e irreversible en la vida de los Pueblos Indígenas" (p. 198). Esta lucha como él mismo dice ha sido modesta, pero va en crecimiento.

Por ello sabiendo que la discusión en torno a este tema no es nada nueva, y tratando de llevar la presente discusión al momento actual, se hace indispensable la revisión de la Ley Orgánica de Educación (LOE, 2009), la misma que en su artículo 26 expresa las modalidades del sistema educativo venezolano, señalando que estas son "La educación especial, la educación de jóvenes, adultos y adultas, la educación en fronteras, la educación rural, la educación para las artes, la educación militar, la educación intercultural, la educación intercultural bilingüe" (p. 15). De esta manera, la LOE plasma las aspiraciones señaladas en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (CRBV) al respecto de una educación diversa, incluyente, en condiciones de igualdad, pluricultural, multiétnica y plurilingüe. En nuestro caso específico, por la naturaleza del presente trabajo nos importa la discusión sobre la modalidad: Educación Intercultural Bilingüe, puesto que para los Pueblos Indígenas su educación debe ser desarrollada bajo esta modalidad.

Educación Intercultural Bilingüe y su Obligatoriedad en Regiones Específicas

La LOE en su artículo 27 considera a la Educación Intercultural Bilingüe obligatoria en regiones específicas del país, textualmente dice que “La educación intercultural bilingüe es obligatoria e irrenunciable en todos los planteles y centros educativos ubicados en regiones con población indígena, hasta el subsistema de educación básica” (p. 15).

En algunas regiones del estado Zulia se aplica esta modalidad educativa. En este mismo artículo la LOE establece además que “La educación intercultural bilingüe se regirá por una ley especial que desarrollará el diseño curricular, el calendario escolar, los materiales didácticos, la formación y pertinencia de los docentes correspondientes a esta modalidad” (p.15). Esta ley especial aún no ha sido promulgada y resultaría interesante su discusión por cuanto hace referencia al diseño de un calendario escolar adaptado a las necesidades de los Pueblos Indígenas según su región, patrones de vida y Cultura.

La Etnomatemática

Se ha hablado de la propuesta de una educación intercultural de los Pueblos, la cual debe conllevar a la necesaria transformación de la Escuela como una de las instituciones del Estado y por ende debe repercutir en el desarrollo del currículo del Sistema Educativo Venezolano. Indiscutiblemente que estos cambios deben efectuarse en el área de matemática; pero, ¿qué propuestas se desprenden desde la educación matemática para fortalecer la educación intercultural?, la respuesta en este sentido podría causar rechazo en algunos intelectuales de la educación matemática en Venezuela; sin embargo, consideramos que la Etnomatemática es y debe ser la punta de lanza para el impulso de elementos matemáticos desde una visión Intercultural. ¿Por qué considerar a la Etnomatemática?, primero, porque a través de ellas se aprecia una valoración de aspectos matemáticos que son importantes para la vida de los Pueblos Indígenas que generalmente son desechados por las élites académicas, esas que se encumbran en lo más alto de la divinidad y erudición desechando lo que se realiza desde las bases de los pueblos; segundo, porque es necesaria la identificación de los aspectos matemáticos de nuestros Pueblos Indígenas para establecer esa reciprocidad en el intercambio de saberes; tercero, porque hasta ahora las matemáticas desarrolladas fundamentalmente a mediados del siglo pasado (la matemática moderna) se desarrollaron para dominar la naturaleza, establecer dominios en el ámbito bélico entre las potencias después de las Segunda Guerra Mundial, es decir se desarrollaron para dominar al otro.

Por el contrario, las prácticas matemáticas desarrolladas por los Pueblos Indígenas se han fundamentado principalmente para convivir con la naturaleza. Estas dos visiones de las matemáticas deben ser tomadas en cuenta cuando se analiza el porqué de un tipo de matemática.

Ahora nos sumergiremos en la comprensión del término Etnomatemática, que por cierto no es tan específico sino por el contrario resulta amplio, el padre de este término Ubiratan D'Ambrosio (1997) la define como la matemática:

> Que se practica entre los grupos culturales identificables, tales como las sociedades nacionales, tribales, los grupos de trabajo, los niños de cierta edad, clases profesionales, y así sucesivamente. Su identidad depende en gran medida de focos de interés, la motivación, y ciertos códigos de una jerga que no pertenecen al ámbito de las matemáticas académicas (p. 16).

Es decir, la define como la matemática practicada por diferentes grupos culturales, Pueblos Indígenas, grupos de trabajo, grupos de niños, etc. Por otra parte, Bishop (2009) considera que la Etnomatemática "es el estudio de las relaciones entre matemáticas y cultura" (p. 72). En este sentido, existe una diferenciación importante por cuanto señala que no se refiere al estudio de una matemática específica, más bien trata de esa relación que se establece entre la matemática y la cultura, de cómo se desarrollan esas ideas matemáticas. Son muchas las interpretaciones que se dan en torno a los seguidores de la Etnomatemática, lo cual coincide con Beyer (2005) al referir el sentido polisémico del término, incluso el mismo D'Ambrosio (2001b) la define como "corpus de conocimiento derivada de las prácticas cuantitativas y cualitativas, tales como contar, pesar y medir, ordenar y clasificar" (p. 37). Aquí, D'Ambrosio no le da preponderancia a ningún grupo en específico, sino a la actividad matemática en sí, coincidiendo con la postura de Bishop (1999).

En el presente trabajo se hace uso del término Etnomatemática para referirnos a las matemáticas practicadas por Pueblos Indígenas, en nuestro caso específico nos referimos a las actividades matemáticas del Pueblo Wayuu, debido a que solamente a partir de este proceso de identificación y análisis pueden ser incorporadas de manera más efectiva al currículo de Educación Intercultural Bilingüe, ella posee una fuerza creadora e integradora ya que permite el establecimiento de elementos de aprendizajes distintos a los que se visualizan en las Escuelas tradicionales, necesitando la incorporación de otros actores distintos a los maestros y maestras para complementar el aprendizaje de la matemática implícita o explícita en su quehacer diario.

En este sentido, compartimos los señalamientos de D'Ambrosio (2001a) cuando expresa que:

> Algunos restos del comportamiento original de estas culturas fueron o aún son proscritos o tratados como folclor….Muchos de estos comportamientos son fácilmente reconocibles en la vida diaria, en las que también están presentes las matemáticas. La matemática es en tanto un quehacer humano como una forma cultural; por consiguiente, está sujeta a la dinámica cultural (p. 89).

De esta manera se puede apreciar la valoración de la existencia de las matemáticas ligadas a la vida diaria de la personas, lo que hacen los Pueblos Indígenas para comprender el mundo que los rodea y para establecer relaciones de convivencia con el medio donde habita.

La Etnomatemática no puede adoptar posiciones de olvido en cuanto a los distintos sistemas que imperan en la sociedad, por tanto consideramos importante el señalamiento que plantea Vithal (1992), citado por Skovsmose (1999), sobre la Etnomatemática, para él la Etnomatemática "tiene que desarrollarse en nuevas direcciones que sirvan como fuerza progresiva en la educación matemática si, por ejemplo, tenemos en mente una situación como la del Sur de África después del Apartheid" (pp. 70-71). Esto lo compartimos plenamente por cuanto no se puede tener una visión ingenua de las matemáticas y mucho menos de las estructuras educativas, políticas y económicas. El conocimiento y las críticas que se le pueden hacer a estas estructuras permitirían un posicionamiento de las características más importantes de nuestros Pueblos, especialmente en el caso de las matemáticas propias, útiles y necesarias en sus contextos.

Nos unimos a lo dicho por D'Ambrosio (1997) al decir "Reclamamos un estatuto de estas prácticas, Etnomatemática, que no alcanzan el nivel de matematización en el sentido usual y tradicional" (p. 21). Pero es factible establecer propuestas que permitan la apropiación de los saberes de nuestros Pueblos a partir de la Educación Intercultural, ya que hasta ahora solamente se ha valorado en las Escuelas el conocimiento matemático occidental.

Las Categorías de Bishop (1999)

El trabajo realizado por Alan Bishop (1999) titulado: *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultura*l, estudia la matemática presente en diferentes culturas del mundo, tratando de hallar las similitudes existentes, con una visión menos sesgada de la matemática, menos culturocentrista, en tal sentido, este autor expresa que “podemos empezar a ver similitudes matemáticas entre “nosotros” y “ellos”. Podemos empezar a admitir la posibilidad de que todas las culturas participan en actividades matemáticas” (p. 41).

En función de estos dos aspectos mencionados: (a) evitar el culturocentrismo y (b) buscar las similitudes entre nuestra cultura y las demás culturas del mundo, se puede tener una mejor apreciación de las diferentes actividades matemáticas de los pueblos.

La propuesta de Bishop (1999) hace una clasificación de las matemáticas a partir de ciertas y determinadas actividades, algunas pueden ser compartidas por algunos teóricos, otras quizá no sean de su agrado o quizá piensen que le falta argumentación; pensamos que esta manera de clasificar las actividades matemáticas es apropiada y permite ampliar nuestro marco de referencia al respecto de las prácticas matemáticas a las cuales estamos acostumbrados a ver en nuestro quehacer académico.

Dentro de las actividades que considera Bishop (1999) están: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar; de seguido explicamos cada una de estas categorías matemáticas.

Las actividades matemáticas halladas en el Pueblo Wayuu bajo la categorización de Bishop (1999)

En estas líneas desarrollaremos el conjunto de actividades matemáticas encontradas en el Pueblos Wayuu, ellas han sido clasificadas bajo las categorías de Bishop (1999) y recopiladas a través de tres fuentes principales: (a) revisión bibliográfica, (b) observación hecha por el autor, y (c) las entrevistas realizadas a docentes y antropólogos. Consideramos que estas actividades matemáticas podrían contribuir a la estructuración curricular de la Educación Intercultural Bilingüe, extendiendo la propuesta tradicional de las matemáticas, incorporando a otros actores distintos a los docentes en el aprendizaje y enseñanza de la matemática, así como llevar ese proceso a ambientes distintos a la Escuela formal.

Contar en el Pueblo Wayuu

Básicamente la matemática Wayuu apreciada desde el contexto escolar, según lo dicho por los docentes y lo visto por el autor del presente trabajo se desarrolla a partir del proceso de conteo. Ahora, ¿cuál es la base del sistema de numeración? ¿Hasta cuanto se puede contar? Son preguntas que resultan interesantes para ser respondidas en el presente trabajo. Debemos aclarar que el sistema de numeración Wayuu es de base diez, se puede decir que los wayuu pueden contar grandes cantidades a partir de su sistema de numeración, es un sistema de numeración compuesto. Describimos dicho sistema a partir de los trabajos realizados por Jusayú y Zubiri (1986) y Jahn (1973a, 1973b).

En este sentido Jusayú y Zubiri (1986) nos dicen que el sistema de numeración Wayuu es bastante completo y que pueden expresarse grandes cantidades de números a partir de este sistema. Estos autores también afirman que “a esas diez palabras hay que añadir *jikí* que significa decena” (p. 43); sin embargo aclara que, en líneas generales, cuando las cantidades son grandes y pasan de doscientos o miles pronuncian las cantidades en español.

Durante las entrevistas realizadas, en esta investigación, el Antropólogo 3 señaló, sobre el desarrollo del sistema de numeración Wayuu, lo siguiente: “ahí se manejan numerales más o menos hasta el número mil ¿por qué el número mil? Por necesidades sobre todo la ganadería” y continúa aclarando el porqué de esto “el Wayuu si necesita contar y medir en mayor escala que muchos Pueblos Indígenas, ¿y por qué? Precisamente por la importancia de la ganadería, la cantidad de chivos que uno pueda tener”, esto es compartido por Jusayú y Zubiri (1986) al referir que “quizás el pueblo guajiro como pueblo ganadero ha desarrollado más que otros Pueblos Indígenas su sistema de numeración. Sería una aplicación de la tesis del P. Schmidt, que alabó Alfred Weber” (p. 46).

Esto significa que el desarrollo de la numeración Wayuu tal y como se le conoce hoy es relativamente nuevo, por cuanto se genera a partir de las necesidades que tenían como Pueblo pastor, esta afirmación se hace en función de saber que el ganado vacuno, caprino y caballar fueron traídos desde Europa luego de la invasión que realizaran los imperios europeos. De esta forma se vislumbra el surgimiento de una actividad matemática a partir de una necesidad práctica como el pastoreo.

Localizar en el Pueblo Wayuu

Al igual que el proceso de medición del tiempo, el proceso de localización es un asunto de mucha importancia para cualquier Pueblo del mundo, según Jusayú y Zubiri (1986) los Wayuu tienen "cuatro franjas o zonas del espacio señalables deícticamente según su mayor o menor proximidad al que habla" (p. 153).

1. *Primera zona:* se indica en guajiro con el verbo *yáuáyá* estar aquí,…, abarca algo menos que el aquí o acá del castellano.
2. *Segunda zona*: para indicar la zona un poco más alejada del hablante que la anterior, pero todavía cercana, se emplea *yaláyalála*
3. *Tercera zona*: la tercera franja un poco más alejada se señala con el verbo *sásása*. Este verbo indica cierta permanencia.
4. *Cuarta zona*: para la zona más alejada se emplea *chácháaya*,…, significa estar allá, estar en la zona más alejada del hablante (pp. 153-157)

Medir en el Pueblo Wayuu

Dentro de la categoría Medir, una de las más sorprendente está relacionada con el proceso de medición del tiempo, el establecimiento de un calendario generado a partir de las necesidades locales. En la mayoría de las escuelas no se trabaja con un calendario Wayuu, debido principalmente a la dinámica educativa de la escuela centrada en las costumbres criollas; sin embargo, Perrin (2006) hace referencia a la existencia de un calendario Wayuu comentando lo siguiente:

> Los guajiros dividen el año en <<estaciones>> que enumeran en un orden definido- como nosotros nuestros meses-, a diferencia que la duración de cada estación no es igual. Además, ya se ha insistido en punto, establecen una relación estrecha entre el trayecto aparente de las estrellas y esta división del año, ya que la misma palabra (por ejemplo *iiwa*), o dos palabras muy cercanas (*juyo'u* y *juya*) designan tanto la estrella o la constelación, como la estación asociada a ella (p. 270).

Este conocimiento del medio donde habitan es vital para la existencia de los pueblos del mundo, es importante que se conozca con detalle el inicio de los periodos de caza, pesca, recolección de miel y otros alimentos consumidos en la dieta básica de cada Pueblo, esto garantiza la subsistencia y perdurabilidad de un Pueblo en el tiempo.

Diseñar en el Pueblo Wayuu

El diseño es una de las actividades matemáticas consideradas por Bishop (1999) y que en el Pueblo Wayuu se desarrolla con una destreza excepcional, para tal caso dividiremos esto en cuatro aspectos fundamentales: (a) tejido, (b) cestería, (c) cerámica, y (d) construcciones de viviendas.

Jugar en el Pueblo Wayuu

Existen algunos juegos practicados por los Wayuu que han sido aprendidos a través del contacto con la población criolla; otros son propios de este Pueblo indígena. Basados en la clasificación presentada por Bishop (1999), el Wayuu practica una serie de juegos realistas; Amodio (2005) menciona que los niños Wayuu "juegan a construir pequeñas empalizadas, reproduciendo los corrales de los chivos o de las vacas, mientras las niñas lo hacen con muñecas o con pequeños utensilios de tapara para cocinar, imitando a las madres" (p. 346). Sobre este tipo de juegos, el autor pudo presenciar algunos de ellos a través de los cuales niñas construían pequeñas casas improvisadas haciendo uso de muebles y sillas.

Según Amodio (Op. cit.) los niños y niñas "utilizan a menudo juguetes elaborados con elementos de su entorno natural, como piedras, tierra, caracoles, madera balsa y palos, con los cuales reproducen aspectos de la vida de los adultos" (p. 346). En el caso específico de las niñas se elaboran las Wayunkeerü, ante lo cual Amodio (2005) señala que:

> La abuela, la madre o las tías elaboran para las niñas las wayunkeerü, unas muñecas de barro, con ropita tradicional hecha de paño. La muñeca que tiene significado ritual, está hecha de barro de jagüey y tiene cara de animales, como pájaros, tortugas o lagartijas…pueden reproducir también las semblanzas de personajes conocidos o de familiares que ofrecen su nombre en los juegos y representaciones que se hacen con ellas (p.347).

Las wayunkeerü llevan en sus caras las pinturas típicas que se hacen las mujeres en las ceremonias tradicionales.

Amodio (Ibíd.) señala que "son muy difundidos los juegos con las metras de vidrio, realizados individualmente o en grupo" (p. 346). No solamente se apreció el juego de metras, sino también, el vuelo de papagayos, honda, pelota y el manejo de bicicletas tanto en el municipio Guajira como en el municipio Mara. Asimismo, Amodio (2005) señala, dentro de los juegos realizados por los niños y niñas Wayuu que habitan en la Alta Guajira, el uso del arco y la flecha; al respecto nos comenta que “los varones juegan desde muy pequeños con pequeños arcos y flechas, construidos por los adultos” (p. 346). De esta manera los niños van preparándose para las labores propias del adulto, la niñez es considerada una etapa de preparación para la vida.

Explicar en el Pueblo Wayuu

Esta actividad matemática es desarrollada por el Pueblo Wayuu de manera continua, los relatos de la creación del mundo por parte de *Maleiwa*, formación de los clanes, aparición del bien y el mal se desarrolla como un eje trasversal. El Pueblo Wayuu no tiene en absoluto nada que envidiarle a la mitología griega y su interrelación del mundo espiritual y su mundo natural, en la Cultura Wayuu existen dos seres mitológicos, *Juyá* y *Pulowi*, el primero es asociado a la lluvia, a la fertilidad, a los buenos tiempos y se identifica con la figura masculina, *Pulowi* por su parte es asociada a la sequía, a los animales, los espíritu y se relaciona con la mujer. En la *Cultura Wayuu* se trata de explicar cada cosa, la existencia de cada elemento.

Conclusiones

Consideramos que los trabajos en el ámbito educativo deberían contribuir notablemente al rescate de los valores del Pueblo y de la identidad como venezolanos; es decir, se debe trascender el aula de clases para que el docente tienda a contribuir a la transformación de la Patria.

En correspondencia con las dos primeras intenciones planteadas en la presente investigación se puede afirmar que se lograron identificar y analizar en el Pueblo Wayuu las seis Actividades matemáticas señaladas por Bishop (1999): contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar. Dentro de ellas las más resaltantes según el autor la constituyen:

(a) Existencia de un sistema de numeración similar al nuestro, de base diez y a través del cual se pueden escribir grandes cantidades.

(b) Existencia de puntos de referencias semejantes a los puntos cardinales que utilizamos para orientarnos y cuya referencia fundamental es el mar.

(c) Existencia de un calendario propio basado en elementos de la naturaleza, ello comprende aspectos astronómicos y otros relacionados a la flora y la fauna.

(d) Diversidad de elementos de diseños; en este sentido, existe una gran riqueza material en la Cultura Wayuu, el aspecto más resaltante tiene que ver con la belleza de sus tejidos así como la funcionalidad de las mismas.

Al respecto de la tercera intención planteada en nuestra investigación, consideramos que los hallazgos realizados permiten decir que existen diversos elementos en el Pueblo Wayuu que podrían contribuir de manera decidida al fortalecimiento de su identidad cultural y por supuesto al proceso de intercambio cultural entre este Pueblo y el resto de la población venezolana, más aún en el ámbito de la educación intercultural.

En el campo específico de la educación matemática consideramos que la identificación de las actividades matemáticas en el Pueblo Wayuu permite ampliar el horizonte en cuanto a las diferentes formas de practicar matemáticas, ellas deben contribuir a la construcción de un verdadero currículo intercultural, debe incorporar elementos que hasta ahora han sido ignorados y desechados por la *Escuela* tradicional, pensamos que este trabajo podría contribuir de manera modesta a esos cambios que amerita el currículo de educación intercultural y por supuesto la *Escuela*. Sabemos que el presente trabajo contará con el apoyo de diversas personas; pero también con la oposición de muchas otras que no comulgan con las ideas de la Etnomatemática, por lo tanto, estaremos prestos a las críticas y observaciones que se hagan.

Referencias

Alvarado, L. (1956). *Datos Etnográficos de Venezuela*. Caracas: Ministerio de Educación.

Amodio, E. (2005). *Pautas de crianza entre los pueblos Indígenas de Venezuela*. Caracas: UNICEF.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós. [Traducido por Genís Sánchez del original en inglés Mathematical enculturation, 1991, Kluwer Academic Publishers].

D’Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. En A. Powel y M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics – Challenging Eurocentrism in Mathematics* Education (pp. 13 – 23). New York: State University of New York Press, Albany.

D'Ambrosio, U. (2001a). La Matemática en América Central y del Sur: Una Visión Panorámica. En A. Lizarzaburu y G. Zapata (Eds.), *Pluriculturalidad y Aprendizaje de la Matemática en América Latina* (pp. 88 - 105). Madrid: Morata.

D'Ambrosio, U. (2001b). Ethnoscience and ethnomathematics: a historiographical proposal for non-western science. En J. Saldaña (Ed.), *Science and Cultural Diversity Filling a Gap in the History of Science* (pp. 37 – 50). México: Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología.

González, O. (2001). Multilinguismo, Etnias y Culturas Indígenas en el "Noroeste Amazónico" del Estado Amazonas de Venezuela. *FERMENTUM*, 11(32), 360-370.

Jahn, A. (1973a). *Los Aborígenes del Occidente de Venezuela I*. Caracas: Monte Ávila Editores.

Jahn, A. (1973b). *Los Aborígenes del Occidente de Venezuela II.* Caracas: Monte Ávila Editores.

Jusayú, M. y Zubiri, J. (1986). *Gramática de la Lengua Guajira*. San Cristóbal: Universidad Católica del Táchira.

Jusayú, M. y Zubiri, J. (2006). *Diccionario Sistemático de la Lengua Guajira*. Caracas: Universidad Católica Andrés Bello.

Morales, F. (1995). Etnoinvestigación: El conocimiento científico a la luz de la diversidad cultural. *Revista venezolana de Economía y Ciencias Sociales*. (Didáctica de las Matemáticas), (1), 75-89.

Mosonyi, E. (2009). Una Mirada Múltiple Sobre la Interculturalidad y la Diversidad. *Diálogos Culturales* [Revista en línea], 4, 187-211. Disponible: http://www.saber.ula.ve/ [Consulta: 2010, Julio 7].

Ortiz, L. (2004). Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2) 171-185.

Pérez, L. (2007). *Educación Superior Indígena en Venezuela*. Caracas: Fondo Editorial IPASME.

Perrin, M. (2006). *El Camino de Los Indios Muertos (mitos y símbolos guajiros).* Caracas: Monte Ávila Editores Latinoamericanos.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una Filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá: Universidad de Los Andes [Traducido por Paola Valero]

Taylor, S. J. y Bogdan, R. (2002). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Hernán Paredes Ávila.

Es Profesor de Matemática (Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 2006), Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática (Instituto Pedagógico de Caracas, 2012). Actualmente es Profesor Agregado a Dedicación Exclusiva en el área de Geometría, en la UPEL, adscrito al Departamento de Ciencias Naturales y Matemática. Ha trabajado en Educación Media General. Es miembro del Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM). Miembro de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). Es parte del Programa de Estímulo a la Investigación e Innovación (PEII), *Investigador A2*. Coautor de los Libros de Matemática de la Colección Bicentenario, Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE). Ha participado y participa en proyectos colectivos de investigación, formación y de promoción de la Matemática y de la Educación Matemática en las comunidades.

Las competencias docentes para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática

Elsa Marina Tirado

Las competencias docentes para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática

Introducción

En la actualidad el acceso, desarrollo y disponibilidad de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha facilitado a la humanidad que ésta disponga de una gran herramienta para sus necesidades sociales, comunicativas, educativas, entre otras. Lo que ha obligado a las instituciones de educación superior repensar su papel y promover nuevos modelos educativos apoyándose en las tecnologías. Así mismo, un organismo como la UNESCO desde 1998 ha tenido como línea estratégica la incorporación de las tecnologías en los sistemas educativos para propiciar la innovación y experimentación pedagógica.

Ahora bien, las características y potencialidad de las tecnologías ha generado que, desde grupos de docentes investigadores hasta espacios como congresos y asociaciones de profesores como la NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos), se impulse la incorporación de las TIC en la enseñanza de la matemática de manera tal de crear nuevas formas de acercamiento al conocimiento matemático, así como también, favorecer en el estudiante nuevos dominios de la misma.

Lo planteado anteriormente reviste de gran importancia ya que sugiere contar con docentes altamente motivados y capacitados para incorporar las tecnologías para el aprovechamiento de la matemática. Es decir, profesores capacitados para la toma de decisión de cómo, cuándo, para qué y en qué momento usar las tecnologías. Es por eso que se propone indagar sobre las competencias didácticas para incorporar las TIC en la enseñanza de la matemática de los docentes de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo (FaCES – UC).

Fundamentación Teórica

Educación matemática y Tecnologías de la Información y Comunicación

Uno de los grandes desafíos que se presentan en la educación matemática es dirigir y crear las condiciones de aprendizaje hacia el desarrollo de estructuras cognitivas preparadas para la investigación y resolución de problemas; es allí, donde el desarrollo tecnológico ha revolucionado el aprendizaje de la matemática por la versatilidad, el poder expresivo y comunicacional de las herramientas computacionales. Sin embargo, la selección de los medios o software para ser utilizados en el quehacer educativo, en un contexto determinado, dependen en gran medida de los objetivos, contenidos, estrategias didácticas, así como también de las características y adecuación de los mismos.

Es importante destacar que la importancia de la integración de las tecnologías, es contribuir sobre todo con la transmisión y comprensión del conocimiento matemático. La creación de nuevos métodos de enseñanza con el apoyo de las tecnologías debe favorecer la alfabetización matemática, entendiéndose esta como las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente, cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y contextos (Rico, 2004).

Así mismo, uno de los grandes beneficios que aportan los recurso tecnológicos a la educación matemática es la de facilitar las diversas representaciones y la modelización. En cuanto al primero, el uso de las representaciones, los sujetos, registran, comprenden y comunican sus conocimientos sobre las estructuras matemáticas. El uso de las tecnologías para la modelización, se explica por el uso de conceptos y procedimientos matemáticos para el abordaje de situaciones problema de una manera no estándar y por otro lado, porque se debe desarrollar una manera particular el pensamiento y la actuación (Ortiz, 2002). Al mismo tiempo, involucra la toma de decisión en la resolución de problemas del mundo real y natural, donde las tecnologías ayudan a manejar grandes volúmenes de datos y la generación de un modelo, a partir de allí construir el conocimiento matemático.

Esto ha generado que se replantee el currículo de matemática; preguntas como ¿qué se debe enseñar?, ¿cómo se planifica, gestiona y evalúa el aprendizaje de matemática?, ¿cómo se evalúa la eficacia de la enseñanza de la matemática?, ¿qué conocimientos alcanzó el estudiante?, tienen nuevos significados a la luz de los nuevos planteamientos surgidos por la incorporación de las tecnologías y el desarrollo del currículo por competencias. La tarea del docente es crear nuevas situaciones de aprendizaje para el estudiante donde puedan analizar, establecer relaciones, promover la expresión y comunicación matemática, entre otras. Bajo este contexto, la tarea del docente es crear y desarrollar propuestas didácticas con el uso de la tecnología que contribuyan a profundizar el conocimiento matemático, que las estrategias favorezcan el aprendizaje significativo, contextualizado y sobre todo aprovechar este potente recurso para generar nuevos dominios en esta disciplina.

Competencias docentes y Tecnologías de la Información y Comunicación

Integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación requiere de una serie de competencias en los docentes para usar los programas tecnológicos y los recursos disponibles en la Internet, con la finalidad de mejorar la calidad de la Educación. Diversos autores señalan que las competencias están relacionadas con una combinación entre lo afectivo, la acción y lo cognitivo cuando se lleva a cabo una acción. Sin embargo, Tobón y otros (2006) refieren que la mayoría de las definiciones de las competencias se centran en el hacer, sin considerar todos los aspectos que ella involucra, como lo es el actuar responsablemente.

En ese orden de ideas, Cejas y Grau (2007) señalan que las competencias de acuerdo a Le Bofert (2000) son un saber actuar en un determinado contexto, ordenando y activando un conjunto de conocimientos, atributos, habilidades y recursos del entorno, para realizar una serie de actividades (profesionales) de acuerdo a unas determinadas exigencias, con el objetivo de producir resultados de acuerdo a ciertos estándares de desempeño.

En las competencias subyacen cinco aspectos integradores sobre los que se definen las mismas: la actividad, la disposición afectivo-motivacional para ejecutarla, el procesamiento de la información, la actuación y los criterios de idoneidad. De esto se desprende que el término competencia comprende habilidades y conocimientos que pueden ser observables y las características particulares subyacentes de los individuos como las actitudes, intenciones, emociones y los valores que no son visiblemente percibidos. De allí que autores como Cejas (2012), Tobón y otros (2006) y Martínez (2009) las categorizan o clasifican. Para los efectos de la presente investigación se entiende la competencia como la coordinación de actitudes, habilidades y conocimientos para realizar de forma idónea y responsable determinadas actividades, lo que supone decidir, conocer y evaluar lo que se hace.

Ahora bien, entendiendo que el docente universitario en su rol de mediador del proceso de enseñanza-aprendizaje y como señalan Castillo y Cabrerizo (2006):"…no sólo debe ocuparse de explicar o transmitir los contenidos de la asignatura, sino también de enseñar a los estudiantes para que aprendan a aprender y aprender dichos contenidos…" (p. 65).

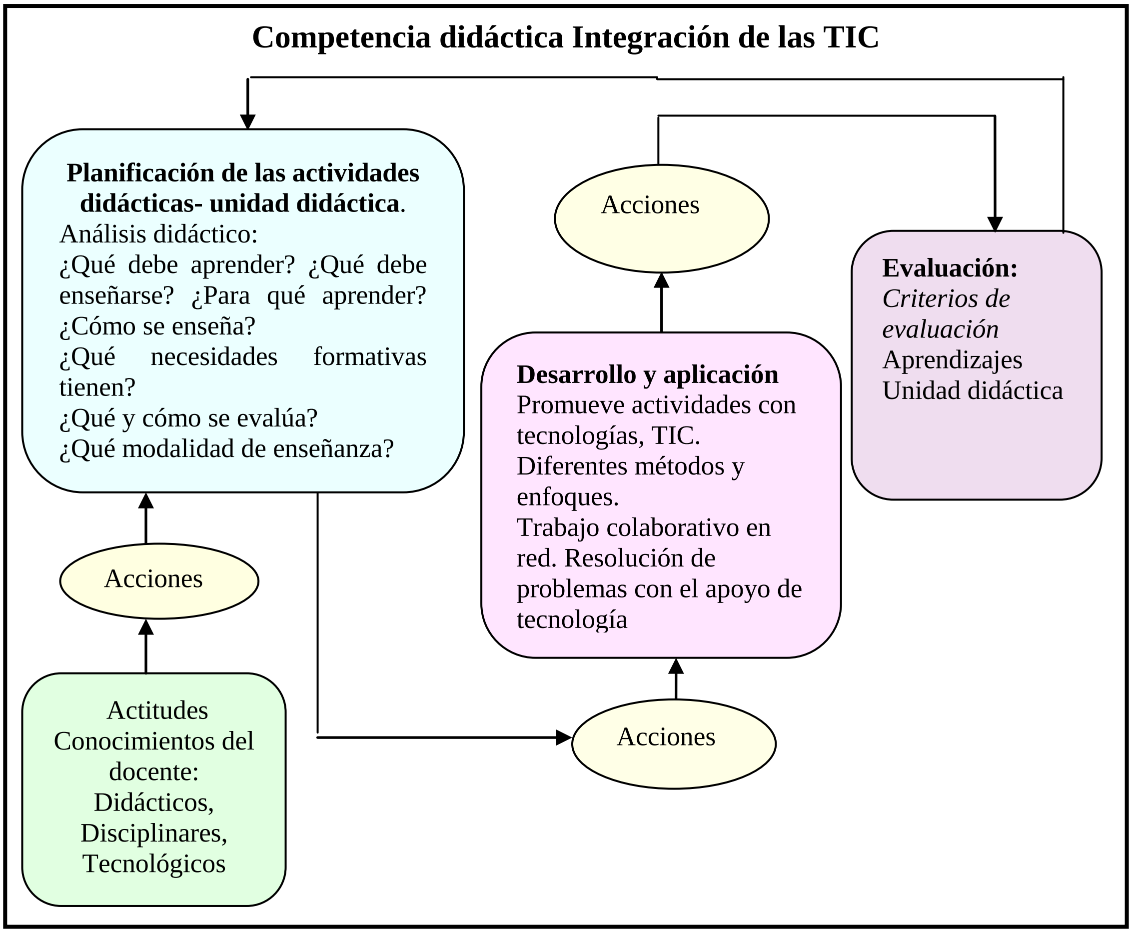
Las competencias de los docentes están vinculadas hacia la planificación crítica, reflexiva y creativa de un conjunto de actividades para desarrollarla de forma idónea y responsable, reflexionando sobre la acción educativa (tareas y actividades) y de los avances de los aprendizajes de sus estudiantes, evaluando el proceso y perfeccionándolo, realizando de ser necesarios los cambios que hubiera lugar.

Bajo esta perspectiva, el desempeño de los profesores, incorporando las TIC, está asociado a la práctica educativa, a la creación intencional de las condiciones usando las tecnologías para facilitar unas determinadas competencias, a la selección de estrategias y el recurso tecnológico, al desarrollo y aplicación de las estrategias en el proceso de enseñanza-aprendizaje sustentadas por un lado en los principios y estándares para su integración en la educación y por el otro que responda a los planteamientos de la didáctica de la disciplina. Por último, la evaluación de su ejecución de acuerdo a las metas planteadas, en este contexto, el desempeño de los docentes se centra en la competencia didáctica para realizar dichas actividades.

Ahora bien, nombrar las competencias es plantear tres dominios básicos: valores y actitudes (Saber Ser), nociones, conceptos, categorías (Saber Conocer) y procedimientos, técnicas (Saber Hacer). Entonces, podemos establecer que integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación a la enseñanza de la matemática, los tres saberes involucrados en el momento de realizar dicha actividad están vinculados a la actitud hacia las tecnologías y el interés en la calidad de la educación con el uso de las mismas (Saber Ser), comprensión de las TIC y los conocimientos involucrados (Saber Conocer) y sobre el tratamiento didáctico de las TIC (Saber Hacer).

Partiendo de la necesidad de establecer las acciones llevadas a cabo por los docentes cuando incorporan las tecnologías, se presenta a continuación en forma esquematizada los elementos que componen la competencia didáctica para la integración de las TIC que servirá de apoyo para establecer los criterios de evaluación de las mismas.

Esquema Nº.1 Modelo Interpretativo de competencia didáctica



Como puede observarse en el esquema anterior el docente lleva acabo tres acciones independientes, la primera, la planificación de la unidad didáctica o actividades didácticas para ello se basa en los conocimientos tecnológicos, didácticos y disciplinares. En él se observan para el análisis didáctico un conjunto de interrogantes para la toma de decisión sobre: los objetivos-competencias, recursos/herramientas, estrategias, organización y secuenciación de los contenidos, la evaluación y la modalidad. La segunda acción es el momento del desarrollo y aplicación de las actividades planificadas, en él se explicita la metodología, el uso de los recursos, la participación de alumnos y profesores. La última acción es la evaluación a través de criterios establecidos tanto del aprendizaje como de los alcances de la propuesta didáctica. Cada una de esas actividades son evidencias con las cuales se puede valorar la competencia didáctica de los docentes para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática.

Metodología de la Investigación

En la presente investigación se logró un conocimiento de la realidad social que está estrechamente relacionada a la incorporación de las tecnologías en las asignaturas de matemática en FaCES - UC, mediante la combinación de métodos de investigación. Ya que, en esta investigación, se buscó comprender los conocimientos, intereses y competencias de los docentes para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática y explicar las relaciones de los mismos.

Asimismo, se utilizó por un lado el método combinado relativo al desarrollo o secuencial, ya que en un principio se recolectan datos cualitativos a través de las entrevistas a los docentes que utilizan las tecnologías para indagar aspectos significativos sobre la incorporación de las tecnologías, para luego ampliar el conocimiento haciendo uso del método cuantitativo en una muestra mayor y elaborar generalizaciones. Esto condujo a la complementariedad de métodos para profundizar y aclarar los resultados generales de la investigación, con lo cual el enfoque corresponde a un diseño mixto de integración de procesos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El trabajo de campo se desarrolló en tres etapas y se utilizaron como técnicas de recolección de la información: la observación, la entrevista y la encuesta.

En la Etapa I (fase cualitativa) se utilizó la entrevista a profundidad para indagar sobre la integración de las TIC en la enseñanza de la matemática.

En la Etapa II, se realizó el análisis de los datos y se estableció los resultados de las mismas, se precisaron los objetivos específicos y la elaboración de instrumentos. En la Etapa III (fase cuali-cuantitativa), se llevó a cabo la aplicación de instrumentos a los docentes de las cátedras de matemática y la observación del uso que le dan a las tecnologías. Para finalmente, ofrecer unos resultados y conclusiones lo suficientemente amplios sobre la incorporación de las TIC y las competencias de los docentes.

Para la Etapa III se construyeron tres tipos de instrumentos: (1) Escala de actitud (categorías: importancia de las TIC y recurso didáctico) e instrumento de evaluación para los conocimientos tecnológicos (categorías: aspectos técnicos, uso didácticos y comunicativos) de Escala tipo Likert. (2) Para las características de los docentes y las competencias didácticas (unidades de competencia: planificadora, metodológica y evaluadora) un instrumento combinado, cuestionario (caracterizar a los docentes) y Escala tipo Likert. (3) Igualmente se desarrolló una lista de cotejo para establecer el uso que le dan los docentes a las tecnologías en las tres etapas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Resultados y Discusión

Para la Etapa I de la investigación entre los aspectos relevantes encontrados se encuentran que tres grandes factores son atribuibles al docente para incorporar las tecnologías: *la actitud* hacia las tecnologías en general y hacia estas como recurso didáctico para promover el conocimiento matemático; *el conocimiento tecnológico,* dentro de este aspecto se encuentran, conocimientos operativos de los recursos tecnológicos y el conocimiento tecnológico asociado al aspecto didáctico y, finalmente, factores vinculados con los conocimientos y acciones para integrar las tecnologías en las etapas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Es importante destacar que los docentes entrevistados señalan que la trascendencia de las tecnologías está vinculada al aspecto didáctico, es decir, sobre las estrategias que se pueden diseñar, por la construcción de nuevos espacios de aprendizaje, por la creación de nuevas condiciones que pueden facilitar el aprendizaje de la matemática de los estudiantes, por ser recursos novedosos que coadyuvan a motivar a los estudiantes, entre otras. Los beneficios del uso de las tecnologías, la mayoría señala que no hay cambios significativos, pero que con el uso de las tecnologías tienen una mejor comprensión de los contenidos matemáticos y sobre todo consideran que tienen nuevas competencias.

Las conclusiones de la etapa III, en primera instancia se examinó el uso didáctico de los recursos tecnológicos y el tipo de recurso. En ese sentido, se tiene que los más usados son los programas de cálculo simbólico, seguidamente, la calculadora gráfica y el editor de ecuaciones tanto para el desarrollo de materiales didácticos, planificación y elaboración de evaluaciones. La mayoría de los docentes hacen uso de programas asociados a la disciplina, ya que los mismos permiten entre otras cosas calcular límites, derivadas, integrales, combinar cálculo simbólico con la representación gráfica, así como por el poco requerimiento de hardware de la mayoría de esos programas. Para el uso de los recursos tecnológicos se estableció que el 27% de los docentes usan las tecnologías para planificar las actividades, la evaluación y utilizan las tecnologías tanto para el aprovechamiento de la matemática en un contenido o una unidad didáctica. Un 42% usa las tecnologías en la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje y en el reporte de notas (evaluación) por lo que se considera bajo. Para finalizar un 23% emplea las tecnologías durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En cuanto a la actitud hacia la incorporación de las tecnologías en promedio se puede decir que es favorable. De acuerdo a los ítems de mayor valoración los docentes están ganados a incorporar las tecnologías porque estas permiten probar diferentes métodos y enfoques para la enseñanza de la matemática, el cual se vincula a sus posibilidades didácticas y metodológicas; y al aprovechamiento de estas para contextualizar y enfocar el conocimiento matemático, tal como señala Rico (2004), entre otros.

En general, la actitud de los docentes para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática, vienen dadas por:

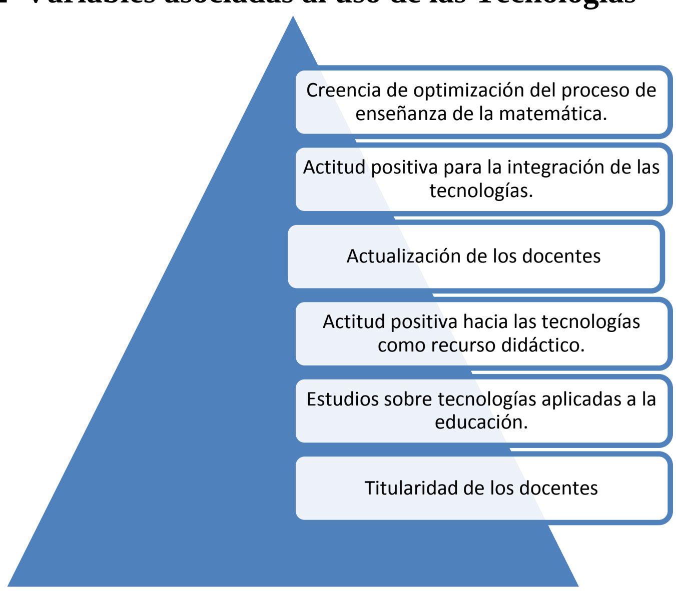
- Las posibilidades didácticas de los recursos tecnológicos, ya que permiten probar diferentes métodos y enfoques en la enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- La importancia que se le está dando a las tecnologías en el ámbito educativo y que pueden ser utilizadas en la Educación Matemática.
- Optimizan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Permiten mejorar el método de exposición al contar con herramientas técnicas avanzadas.
- El poder de comunicación de las tecnologías.
- Las tecnologías pueden hacer las clases más participativas, colectivas e interesantes tanto para el docente como para el alumno.

De acuerdo a los resultados, los conocimientos tecnológicos de los docentes en promedio son suficientes para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática. El 61% de los docentes tienen conocimientos suficientes, el 27% moderados, un 4% son expertos y el 8% restante, bajo. Sin embargo, sólo el 50% de ellos lo utilizan en el proceso de enseñanza de la matemática bien sea en todo el contenido o en un contenido en particular y el 50% de los docentes tienen estudios sobre tecnologías aplicadas a la Educación, lo que nos indica que los docentes de matemática por la naturaleza de la disciplina son proclives a manejar recursos tecnológicos, como calculadoras, programas de cálculo simbólico, entre otros.

Según lo planteado en los párrafos anteriores se puede especificar que los docentes de matemática tienen una actitud favorable hacia la integración de las tecnologías y al uso de las mismas como recurso didáctico por sus posibilidades didácticas y metodológicas; y al aprovechamiento de estas para contextualizar y orientar el conocimiento matemático. Los conocimientos tecnológicos en general son suficientes para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática y en especial para presentar información y conocimiento matemático.

Otro aspecto que se puede destacar de la investigación está vinculado a las variables o aspectos que están asociadas al uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática vinculadas al docente. Las mismas se muestran a continuación en orden jerárquico:

Esquema Nº.2 Variables asociadas al uso de las Tecnologías



Fuente: Elsa Marina Tirado

Ahora bien, en cuanto a las competencias didácticas, para integrar las tecnologías en la enseñanza de la matemática, los resultados arrojan que el desempeño o las competencias didácticas de los docentes de matemática de FaCES UC en promedio es regular, el 50% de los docentes tienen un buen nivel de competencias para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática por cuanto se ubican en la escala de estimación en el rango de bueno, un 8% poseen excelentes competencias. El 42% restante se ubican en un desempeño entre regular y deficiente.

En cuanto a las unidades de competencia que componen la competencia didáctica para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática; de acuerdo a los hallazgos en promedio los docentes tienen un desempeño regular en la planificación de las actividades didácticas con el uso de las tecnologías. Los indicadores de desempeño de la competencia planificadora con mayor valoración es la de organizar información usando herramientas tecnológicas para presentar el contenido programático. Le sigue la identificación de necesidades formativas que pueden ser abordadas con el uso de las TIC. Así mismo, para el indicador proponer objetivos para orientar los aprendizajes usando las tecnologías en promedio es considerado suficiente. Otro de los indicadores que es importante destacar es aquel referido a la selección del recurso/herramienta tecnológica para desarrollar competencias matemáticas, el promedio del desempeño de los docentes es considerado regular, esto nos indica que existen deficiencias al momento de escoger el recurso tecnológico más adecuado al contenido o conocimiento matemático. Igualmente existen insuficiencias sobre el diseño de procedimientos e instrumentos de evaluación para el aprendizaje con las TIC y el estimar tiempo para el desarrollo de actividades para que el estudiante maneje las tecnologías.

Para la unidad de competencia metodológica entendida como el conjunto de acciones para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática, los resultados arrojan que el desempeño o las competencias de los docentes son regulares. Donde el 42% están entre suficientes y excelentes, por lo que se considera que este grupo de docentes manejan el conjunto de elementos o indicadores de esta unidad de competencia. Es importante señalar que los indicadores de desempeño para la competencia metodológica están orientados por un lado hacia el uso de la tecnología para el beneficio de la matemática, a través de explorar, conjeturar, reflexionar, sobre un determinado contenido matemático y por el otro, al uso de las TIC siguiendo los criterios planteados por Cabero (2007) y otros, sobre los aportes de estas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De acuerdo a los resultados obtenidos los docentes se inclinan hacia el uso de un sólo tipo de recurso tecnológico.

Los indicadores de mayor valoración el primero se refiere a las actividades administrativas propias de la labor docente con el apoyo de la Internet. El siguiente indicador refiere a la utilización de las tecnologías (software, calculadora, computadora, etc.) para explorar ideas matemáticas con los estudiantes, con un promedio de 2,5 considerado de regular a moderado. El utilizar diferentes TIC para alcanzar aprendizajes específicos de la matemática ocupó el tercer lugar con un promedio de 2,38 considerado regular. Para las actividades con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación a través de plataformas virtuales, foros y actividades en la red los docentes tienen un desempeño de regular a deficiente.

Por último, la unidad de competencia evaluadora en la cual se ponen de manifiesto elementos asociados a la evaluación, tales como, evaluar usando la tecnologías, el evaluar las unidades didácticas desarrolladas con las tecnologías y la gestión de las evaluaciones a través de las tecnologías de la información y comunicación. En ese sentido, se tiene que las competencias de los docentes son regulares. Cuando se examina el desempeño de los docentes en las acciones que deben ejecutar para evaluar tanto las unidades didácticas desarrolladas como el dar aportes a otras, los resultados arrojan que son insuficientes, por lo que se puede afirmar que requieren formación e investigar en este ámbito, es decir, sobre los principios que se deben considerar al momento de evaluar las unidades didácticas en las cuales se incorporan la tecnologías.

Es significativo señalar, que existe una asociación muy alta entre la competencia planificadora, competencia metodológica y la competencia evaluadora, esto quiere decir, que docentes que tienen alta competencia planificadora, tienen alta competencia metodológica y evaluadora. Asimismo, docentes con bajas competencias planificadoras, tienden a tener baja competencia metodológica y evaluadora.

Cuando se realizó el análisis bivariante entre las variables en estudio los resultados arrojaron que existe una relación muy alta entre la actitud de los docentes para la incorporación de las tecnologías y el desempeño de los docentes para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática o las competencias que tienen para integrarlas. Es decir, a mayor actitud para la integración de la tecnología mayor es la competencia didáctica, a menor actitud menor competencia didáctica. Al mismo tiempo, existe una relación alta entre la actitud para la integración de las tecnologías, actitud de las tecnologías como recurso didáctico de los docentes y las unidades de competencia planificadora, metodológica y evaluadora. Desde las perspectiva de las competencias el saber ser o el aspecto actitudinal-emocional de las mismas es satisfactorio para aquellos docentes que tienen competencias didácticas suficientes.

Ahora bien, al relacionar las variables competencias, actitud para la integración y el conocimiento tecnológico, se establece una tendencia significativa, que el alto conocimiento tecnológico no es garantía de competencias didácticas y actitudes para la integración. Sin embargo, los docentes que tienen una competencia y actitud media-alta tienen conocimientos tecnológicos moderados, es decir, el conocimiento tecnológico no necesariamente tiene que ser alto para incorporar las tecnologías en la enseñanza de la matemática. Así mismo, se tiene que docentes con alto conocimiento tecnológico no poseen las competencias didácticas y actitud para la integración.

Finalmente, los docentes con mejores competencias didácticas para la integración de las tecnologías son aquellos con mayores actitudes y mayores conocimientos tecnológicos y que están completamente de acuerdo que las tecnologías contribuyen a optimizar el proceso de enseñanza de la matemática. Al mismo tiempo, han realizado estudios sobre tecnologías aplicadas a la educación y se mantienen actualizados. Siendo entonces, los docentes universitarios con competencias para incorporar las tecnologías, poseedores de los valores como el saber y abiertos a nuevos conocimientos. Capaces de crear y llevar a cabo, estrategias cognitivas y meta-cognitivas que permitan impulsar los conocimientos matemáticos en sus estudiantes usando las tecnologías y de evaluar tanto lo desarrollado como su propio desempeño.

Recomendaciones

- En primer lugar, continuar investigaciones sobre las competencias didácticas para la integración de las tecnologías en la enseñanza de la matemática y los conocimientos sobre las cuales se sustentan, de forma tal, de establecer la certificación de las mismas.
- Las instituciones de educación superior deberían promover la actualización de sus docentes.
- Promover la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación desde las estructuras académico-administrativas más básicas como las cátedras de las asignaturas, el uso de las mismas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Impulsar la participación de los docentes adscritos a las diferentes cátedras de matemática, en la planificación académica para la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación, así como también, en la creación de las estrategias didácticas usando las tecnologías.

- Evaluar las propuestas didácticas (unidades didácticas) en función de dos parámetros: el alcance de los conocimientos desarrollados a través del uso de las tecnologías de la información y comunicación; y de las acciones llevadas a cabo para incorporar las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Desarrollar los programas de formación sobre tecnologías de la información y comunicación en la educación bajo un enfoque de competencias.
- Los programas de formación deben incluir el desarrollo de propuestas didácticas por parte de los docentes-estudiantes.
- Crear y desarrollar propuestas didácticas virtuales para el beneficio del proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático.

Referencias

Cabero J. (2007). (Coordinador). *Nuevas tecnologías Aplicadas a la Educación*. España: Editorial Mc Graw Hill.

Castillo, S. y Cabrerizo, J. (2006). *Formación del Profesorado en Educación Superior*. *Desarrollo curricular y Evaluación*. (Volumen I). Madrid: Editorial Mc Graw Hill.

Cejas, M. y Grau, C. (2007). *La formación de los recursos humanos en las organizaciones empresariales. Una visión teórico-epistemológica desde la formación por competencias*. Universidad de Carabobo: Fondo editorial Tropykos.

Cejas, M. (2012). *Las Competencias del profesor universitario: Clave para una educación de calidad y garantía del desarrollo profesional en el egresado universitario*. Ponencia en el Seminario de Investigación del Ciclo Básico FaCES, La Morita.

Hernández, R.; Fernández, C.; y Baptista, P (2010). *Metodología de la Investigación*. (Quinta edición). México: Editorial Mc Graw Hill.

Martínez L, F. J. (2009). Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y las competencias básicas en educación [Revista en línea]. *Espiral. Cuadernos del Profesorado*, 2(3), 15-26. Disponible en: http://www.cepcuevasolula.es/espiral

NCTM. (s/f). El uso de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática[Documento en línea]. *Revista EDUTEKA*. Disponible: http://www.eduteka.org/DeclaracionTech.php.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L. (2004): Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En Castro, E. y De La Torre, E. (Eds.), *Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña: Universidad de la Coruña.

Tobón, S., Rial, A., Carretero, M. y García, J. (2006). *Competencias, calidad y Educación Superior*. Colección Alma Mater. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio.

UNESCO (1998, octubre). *Declaración Mundial Sobre la Educación Superior en el Siglo XXI: Visión y Acción* [Documento en línea]. Disponible: http://www.mes.gov.ve/servicios/discapacidad/conferencia_mundial.doc

Elsa Marina Tirado Mudarra.

Doctora en Didáctica y Organización de las Instituciones Educativas por la Universidad de Sevilla, España. Es Licenciada en Educación, Mención Matemática, y Magister en Enseñanza de la Matemática por la Universidad de Carabobo (UC). Ha realizado estudios sobre Tecnología de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación en UC. Ha trabajado por más de 10 años en investigaciones sobre la incorporación de las tecnologías en la educación matemática. Forma parte de la línea de investigación de Tecnología de Avanzada integradas a las áreas de Matemáticas, Estadísticas y Procesos Cuantitativos y Pedagogía y Didáctica de la Matemática, Estadística y Técnicas Cuantitativas del Departamento de Matemática, Estadística y Técnicas Cuantitativas de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES), Campus la Morita. Es docente Titular de la cátedra de Matemática de FACES, Campus La Morita. Ha participado en eventos de ámbito nacional e internacional.

Diseño de hipervídeos. Una propuesta de recurso didáctico para el aprendizaje de límite de funciones

Yolimar Goatache Llovera

Diseño de hipervídeos. Una propuesta de recurso didáctico para el aprendizaje de límite de funciones

Introducción

La utilización de la computadora en el currículo de matemáticas permite alejarse de cursos donde se hace énfasis en las destrezas calculatorias y orienta la enseñanza hacia los conceptos y las aplicaciones. El uso de las TIC en la enseñanza del Cálculo impone una reflexión en cuanto a la profundidad de los aspectos superficialmente vistos en el aula de clases, ya que más allá de favorecer los cálculos numéricos y simbólicos, estimula los procesos de visualización que permiten realizar diferentes representaciones semióticas (escrito, verbal, gráfico, gestual, material) de los conceptos y procedimientos propios de esta área de conocimiento. La capacidad gráfica de los computadores actuales es de gran valor para mostrar significativamente una gran cantidad de conceptos y relaciones Matemáticas. Al respecto, Tall y Mejía (2004) aseguran que el uso de los recursos tecnológicos potencia la visualización y las diferentes representaciones de un mismo concepto, como aspectos facilitadores del aprendizaje.

Pero los recursos tecnológicos no se limitan a la calculadora gráfica o a los programas de Cálculo Simbólico. Existen diferentes herramientas tales como: software educativo, hipermedios, Internet, pizarra electrónica, etc. que también son utilizados como recursos didácticos en los procesos educativos. En el caso de la enseñanza de las Matemáticas lo importante según González, Albergante y Sottile (2005) es que los recursos escogidos sirvan como elemento catalizador y pongan énfasis en los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos y en el manejo dinámico y coherente de los diversos sistemas de representación.

Los hipermedias y multimedias introducen cambios significativos en la educación, especialmente porque estructuran la información de un modo no secuencial integrando distintos soportes de información: texto e hipertexto, imágenes digitales bidimensionales y tridimensionales, animática y vídeo (Romero y Villena, 2007).

Las afirmaciones anteriores sugieren interrogantes en torno al aprovechamiento de las ventajas que ofrecen los diferentes recursos tecnológicos para su uso en el aula, es decir, integrar las potencialidades comunicacionales que brindan los recursos hipermediales con la presentación de la información a través de elementos audiovisuales que ofrece el vídeo. Y específicamente, en la enseñanza del Cálculo, cómo combinar los aspectos más relevantes que sirvan de recurso didáctico al currículo matemático, en cuánto al desarrollo cognitivo de los procesos de visualización y conceptualización, utilizando para ello diferentes formas de representación.

Objetivos

Los apartados referidos en este artículo son parte de una investigación que contempla el desarrollo de un hipervídeo con un enfoque educativo a fin de utilizarse como herramienta didáctica en el aprendizaje del Cálculo, que va desde el diagnóstico en cuanto al uso de recursos tecnológicos en general, hasta la evaluación triangulizada de la incorporación del medio en el curriculum matemático. En este sentido, se pretende diseñar un hipervídeo, siguiendo todas las fases y etapas de elaboración de materiales didácticos con soportes informáticos, para producirlo utilizando las herramientas tecnológicas adecuadas en el tratamiento e integración de las secuencias videográficas y los hipervínculos correspondientes.

Aspectos Teóricos

El Hipervídeo.

Una nueva tecnología conocida como hipervídeo está siendo desarrollada para permitir la unión de segmentos de vídeo de nuevas formas. Usando software de autor, los objetos en el vídeo pasan a ser elementos seleccionables mientras se mueven por la pantalla. Al ser seleccionados, un nuevo archivo se reproduce y luego se vuelve al video original, desde el punto en que se seleccionó el objeto. La idea de crear vínculos de materiales de diversos medios dentro de un texto se denomina hipertextos, entonces; si podemos crear vínculos de materiales de diferentes medios dentro de un vídeo se denomina hipervídeos.

García-Valcárcel (2008) define al hipervídeo como un modelo de vídeo interactivo basado en la asociación de contenidos de diversa naturaleza a lo largo de su línea narrativa. Esta autora considera que se trata de un hipertexto audiovisual, de manera que se puede intervenir en la secuencialidad del relato e interactuar con otros tipos de información: textos, imágenes fijas, audio, páginas web, etc.

Bartolomé (2004) señala que con el concepto de hipervídeo se pretende que los vídeos superen la concepción lineal tradicional y adopten el papel de índice o hilo conductor de una recogida de información organizada y estructurada.

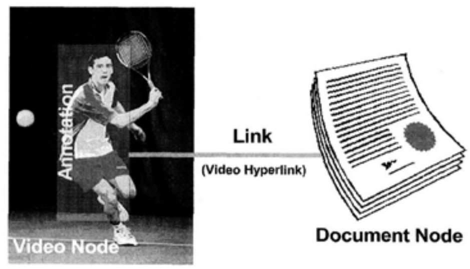


Figura 1*: Concepto de Hipervídeo (Stahl, Finke y Zahn, 2006)*

Posibilidades didácticas del hipervídeo.

- ✓ Puede ser eficaz para motivar a los alumnos, no tanto por el componente tecnológico sino por la forma de procesamiento de la información.
- ✓ Al ser documentos interactivos, el alumno puede ir seleccionando los recursos de mayor interés para su exploración mientras o posteriormente al visionado del vídeo principal.
- ✓ Permite tomar decisiones sobre el tipo de información a consultar y, de este modo, la adaptación a un ritmo particular que posibilita personalizar el recurso adaptándolo a las necesidades del alumno.
- ✓ Proporciona en cualquier momento de la secuencia videográfica, información más detallada acerca del contenido del vídeo, la realización de algún tipo de actividad o alguna reseña de un tema transversal al tema tratado en el vídeo; los cuales pueden ser en formato de textos, imágenes, audio, páginas web, otros vídeos e incluso hipervídeos.

Diseñando Hipervídeos.

Para diseñar hipervídeos con fines didácticos, habrá que pensar qué materiales complementarios al vídeo principal, en cualquier formato digital, pueden ser de interés para la comprensión de los conceptos tratados o para la profundización en determinados aspectos o también para generar actividades por parte de los alumnos que les permitan ejercitarse, reflexionar o sacar conclusiones (García-Valcárcel, 2008). Asimismo, para la creación, se debe contar con un Software de Autor que permita establecer vínculos entre cualquier sección del vídeo, secuencia o cuadro específico con elementos de otros medios tales como: textos, fotografías y gráficos, audio, narración, música, páginas web, y cualquier otra aplicación de software. Entre ellos se pueden nombrar el Hyperfilm y el HiperVideo Studio. El Hyperfilm nace a comienzos del milenio como una sociedad experimental que pretende desarrollar la comunicación hipermedial a través del proyecto llamado "Dschola", el cual es un proyecto italiano que se puede conocer a través de su web: http://www.dschola.it/; y el HiperVideo Studio es una herramienta de creación de hipervídeos, el cual utiliza el video digital como su eje principal y ofrece una nueva experiencia rompiendo la lectura lineal que tiene por su propia naturaleza el vídeo.

Fases del Diseño y Producción de un medio de utilidad educativa.

Son diversos los autores que han sugerido las fases del diseño y producción de un medio; sin embargo, serán referentes fundamentales de este proceso las características y función del medio, los objetivos educativos, las características de los alumnos, la propuesta de interacción con el mismo y los objetivos del proceso de enseñanza. Cabero (2001), identifica como fases y etapas del diseño y producción de un medio, las siguientes: diseño, producción y postproducción, y evaluación.

Cuadro 1.
Fases y Etapas del Diseño y Producción de un medio (basado en Cabero, 2001)

Diseño	Análisis de la Situación	• Selección del tema y los contenidos. • Identificación y delimitación de la audiencia. • Determinación del medio. • Objetivos a alcanzar. • Revisión de materiales. • Determinación de recursos humanos y técnicos.
	Plan y temporización del proceso de desarrollo	Concreción de los diferentes momentos en los cuales se llevará a cabo la realización del medio y los materiales de acompañamiento.
	Documentación	Información sobre el tema objeto del medio. Puede ser visual y auditiva.
	Guionización	Secuencia organizada de la información y su plasmación en un modelo estándar utilizado.
Producción y Postproducción	Concreción técnica de las decisiones adoptadas, tanto en la captación directa de la realidad de la imagen y el sonido, como a su posterior manipulación técnica.	
Evaluación	• Emisión de un juicio sobre la calidad científica-técnica-estética del medio. • Sugiere el uso e incorporación al aula y mercado. • Sugiere su revisión y nueva realización de las etapas o fases previas.	

Visualización, TIC y aprendizaje del Límite de Funciones.

Las dificultades que encuentran los estudiantes y que están asociadas a la conceptualización de la noción de límite han sido muy investigadas por los didactas en esta área. Según Camós y Rodríguez (2012) la noción de límite funcional es un concepto complejo, donde se evita explicitar la definición formal, favoreciendo una aproximación intuitiva y operativa, lo cual producen serias dificultades para la comprensión y el aprendizaje de dicho concepto.

Según Duval (2012), “En matemática, a diferencia de las otras ciencias, el acceso al objeto de estudio es exclusivamente semiótico, y toda actividad consiste en la transformación de representaciones semióticas, ya sea que se trate de exploración, razonamiento o visualización” (p. 4). En este sentido, notamos coincidencia con las afirmaciones de Colombano (2012) cuando establece que el uso del sistema verbal evidencia una concepción del límite de carácter dinámico, el algebraico estático y abstracto, el numérico dinámico pero con énfasis en la aproximación, y el sistema gráfico se centra en el aspecto visual. Tal como aseguran diferentes investigaciones, la visualización representa una herramienta para abordar las diferentes representaciones semióticas que facilitan la comprensión de un concepto matemático.

El auge de las nuevas tecnologías de la información abre paso a nuevas tendencias educativas enmarcadas en la necesidad de aprender. Al respecto Montenegro y Díaz (2012) establecen que el aprovechamiento de las TIC constituye un modo atractivo de potenciar el acercamiento a los diferentes registros semióticos de una noción matemática y su visualización.

Sepúlveda, Vargas y Escalante (2013) afirman, que el desarrollo de herramientas computacionales ha influido notablemente tanto en los métodos y caminos para producir conocimiento disciplinar, como en la forma en que los estudiantes pueden aprender o construir ese conocimiento. En este sentido, según Tall, Smith y Piez (2001), de todas las áreas en Matemáticas, el Cálculo ha recibido el mayor interés en cuanto a inversión en el uso de la tecnología. Las iniciativas alrededor del mundo han introducido una gama de acercamientos innovadores en el uso del software gráfico para explorar conceptos del cálculo, tales como Mathematica, Derive, Maple y Mathcad entre otros. En todo caso, la evolución permanente de las TIC permite disponer de una gran cantidad de recursos tales como: Aplicaciones Multimedias, Aulas Virtuales, Internet entre otros; los cuales potencian los procesos mentales necesarios para la comprensión del conocimiento matemático y que pueden servir de soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión Matemática.

Aspectos Metodológicos

La metodología se enmarca en el diseño y producción de un recurso didáctico audiovisual de corte hipermedial que plantea Cabero (2001).

Análisis de la Situación:

Selección del tema y los contenidos: El tema a abordar es el relacionado con el "Límite de funciones de una variable real". En la selección de contenidos se consideró la conexión de los temas según su naturaleza, la cual se realizó bajo el principio de inclusión de un tópico en otro; y la propuesta de Clemente (1995) basada en una serie de criterios distinguiendo los siguientes: a) *Pedagógico*: El tema de Límites está propuesto en cualquier estructura curricular de Cálculo Diferencial. b) *Epistemológico*: La naturaleza propia del contenido matemático determina el momento adecuado y el planteamiento didáctico que se requiere en esta materia de estudio. c) *Psicológico*: Se pensaron los contenidos desde la perspectiva de los aspectos cognitivos, motivacionales y afectivos del alumno. d) *Socioideológico*: Se consideró la formación integral del alumno, en cuanto a la importancia de los conocimientos impartidos propios de la asignatura, y del desarrollo de la sociedad a partir de los avances tecnológicos que han venido surgiendo.

Identificación y delimitación de la audiencia: El recurso está dirigido a estudiantes que cursen estudios de Cálculo Diferencial. Dependiendo de la orientación y planificación del profesor, puede ser utilizado en varios niveles de la educación.

Determinación del medio: Se decidió diseñar un Hipervídeo con fines didácticos. Se consideró que al poseer este recurso las características audiovisuales propias del vídeo y las de hipertextualidad del hipermedio; se potencia el proceso de visualización a través de las diferentes representaciones que se le pueden dar a un mismo concepto.

Objetivos a alcanzar: *Objetivo General*: Analizar el concepto de Límite de Funciones desde diferentes representaciones semióticas. *Objetivos Transversales*: a) Valorar la importancia del concepto de límites como herramienta fundamental para la definición de otros conceptos del Cálculo y b) Valorar la importancia del uso de herramientas tecnológicas en la comprensión de conceptos matemáticos.

Revisión de Materiales: Debido a la novedad que representa el Hipervídeo como recurso tecnológico, no se halló ningún material con las características de este medio que abordara el tema de Límites de Funciones.

Determinación de recursos humanos y técnicos:

Recursos Humanos: Un profesor de matemáticas y cuatro (4) colaboradores para las funciones de producción y post-producción, los cuales ejercerán los papeles de diseñador, camarógrafos y directores técnicos.

Recursos Técnicos: Se consideran los específicos de la grabación: cámara de vídeo “Handycam Sony” modelo DCR-DVD305E, Mini DVD+RW 8cm, trípode, focos, equipos de sonido; los específicos de la escena: el aula “Seminario 9” de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, un ordenador y un vídeo proyector, el Software DERIVE para el tratamiento de representaciones matemáticas; y los específicos de la post-realización: ordenador de mesa Pentium IV, con disco duro 160GB y monitor TFT 17”; Windows XP y Office 2003; Software “Windows MovieMaker” para la edición del producto videográfico; Software “Hyperfilm” para la creación del producto hipermedial.

Plan y temporización del proceso de desarrollo:

En esta fase se elaboró un Plan de Trabajo donde se concretaron los diferentes momentos que se llevaron a cabo para la realización del medio.

Documentación:

La documentación sobre el tema objeto del medio, fue abordada a partir de la revisión de textos de Cálculo de diferentes autores conocidos y páginas web consultadas. Con la información encontrada, se elaboró la idea central del vídeo conductor y los 11 vínculos del hipervídeo.

Guionización:

Se consideraron tres momentos: La sinopsis, el guión literario y el guión técnico.

La Sinopsis: *Introducción:* Comprende el inicio del vídeo conductor, y por lo tanto es esencial para el proceso de motivación del estudiante acerca del tema en cuestión. Consta de un conjunto de imágenes fijas y en movimiento que involucran el concepto de límites como fundamentación teórica para la definición de algunos conceptos en diferentes áreas del Cálculo; específicamente el concepto de derivadas a través de su interpretación como velocidad instantánea y la integral definida a través de su interpretación geométrica como área bajo la curva.

Simultáneamente se escuchará una voz en off que relaciona cada imagen vista con el contenido que se está estudiando. En esta sección se encuentran cuatro enlaces o vínculos a otros documentos que contienen en forma más detallada los conceptos de velocidad instantánea, integral definida y el propio límite; además una breve historia del Cálculo. *Cuerpo:* Este momento del hipervídeo es el más importante en cuanto se encuentra la explicación del tema a abordar a través de un ejemplo que permite la comprensión del concepto central: El Límite. El profesor expondrá el contenido a tratar apoyándose en una presentación de diapositivas proyectada en la pizarra. Las imágenes transmitidas a través del vídeo darán mayor importancia, expresividad e impacto a lo que el profesor explica en la pizarra, haciendo uso de encuadres de primer plano y de planos de detalle. El cuerpo a su vez se divide en dos momentos que son: la explicación del concepto a través de tablas de valores y la explicación del concepto a través de la gráfica de la función utilizando el DERIVE.

Esta última permitirá introducir los temas de Límites laterales, infinitos y al infinito. En esta sección se encuentran seis enlaces o vínculos: uno al principio que contiene la presentación que se muestra en el vídeo conductor, uno al término de la presentación que contiene una guía inductiva para aprender a manejar básicamente el DERIVE, uno casi inmediatamente que contiene la gráfica de la función del ejemplo, y ya al final de la exposición tres enlaces a otros hipervídeos que contienen la explicación de límites laterales, límites infinitos y límites al infinito, los cuales fueron desarrollados bajo el mismo esquema del vídeo conductor central. *Cierre:* En esta sección se da culminación al vídeo. El profesor, una vez haya terminado su exposición, exhortará a la realización de un conjunto de ejercicios que posteriormente deberá realizar el estudiante. En ésta se tiene en cuenta un sólo enlace donde se encuentra el archivo contentivo de las actividades pendientes que debe realizar el estudiante. Finalmente aparecerán los créditos respectivos de aquellas personas y entidades que colaboraron en la realización del hipervídeo.

La figura 2 ilustra la secuencias videográficas con sus enlaces a través del Análisis de Tareas que debe realizar el alumno con el recurso propuesto.

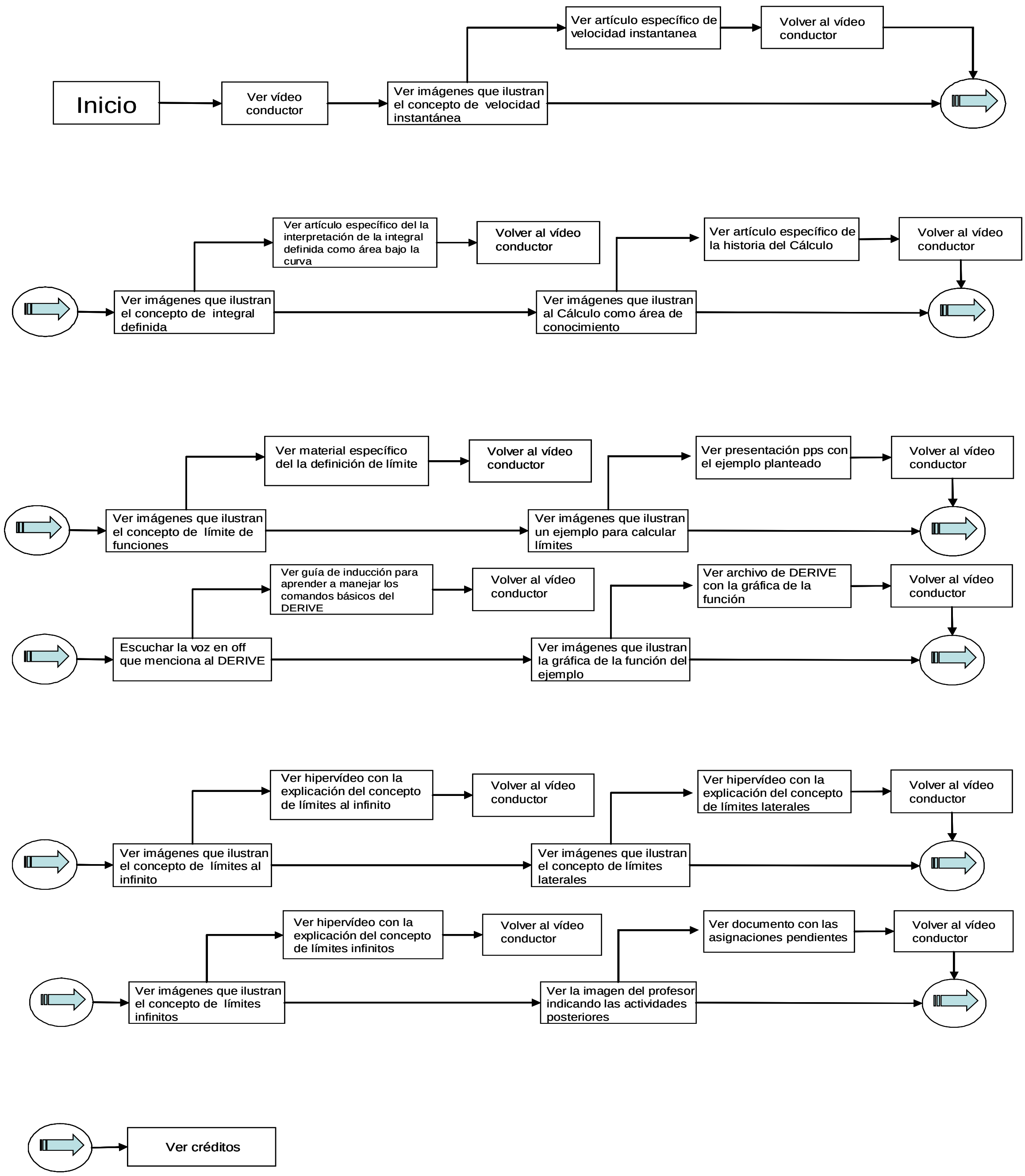


Figura 2: *Análisis de Tareas para el uso del Hipervídeo*

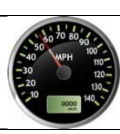
Guión Literario: Para la elaboración del guión literario se consideró la afirmación de Cabero (2007) quien establece que éste necesita dos fases: la elaboración del guión de contenidos y la realización del guión literario en sí mismo.

Cuadro2*: Esquema de los aspectos más resaltantes del Guión Literario*

Hipervídeo Central			
Imagen	**Voz en off**	**Contenido**	**Hipervínculo**
☑ Una persona hablando. ☑ Avenida de la ciudad con afluencia de vehículos.	¿Qué velocidad alcanza ese carro?	El límite como base de la definición de derivadas	
☑ Avenida de la ciudad con afluencia de vehículos	*“Sonido de ambiente”*	Igual	
☑ Un velocímetro	Si observamos el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de una ciudad…	Igual	
☑ Una persona hablando. ☑ Avenida de la ciudad con afluencia de vehículos.	La definición de velocidad instantánea se reduce al cálculo de la derivada, un tipo particular de límite y fundamenta lo que se conoce como Cálculo Diferencial.	Igual	Si Artículo referente a los fundamentos del cálculo de la velocidad instantánea

Guión Técnico: Asumiendo la afirmación de Cabero (2007) donde establece que el guión técnico es el literario pero enriquecido, se consideró destacar para la elaboración del hipervídeo, cuatro cuadros de cinco columnas: Figura, voz en off, duración de cada escena, momento del vínculo y tipo de plano.

Cuadro 3*: Guión Técnico del Hipervideo Central*

Imagen	**Voz en off**	**Duración**	**Hipervínculo: Nombre Tipo documento Indicador tiempo**	**Tipo de plano**
	¿Qué velocidad alcanza ese carro?	4”		PM
	*“Sonido de ambiente”*	4”		PG
	Si observamos el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de una ciudad…	6”		PD
	La definición de velocidad instantánea se reduce al cálculo de la derivada, un tipo particular de límite y fundamenta lo que se conoce como Cálculo Diferencial.	10”	Velocidad Instantánea (Word) 25”	PM

Producción y Postproducción:

Una vez realizado el guión técnico se procedió a la producción y postproducción del Hipervídeo, es decir del vídeo conductor y de los materiales que servirán de enlace o vínculo.

Producción: Para la elaboración del recurso se realizaron un conjunto de tomas videográficas y fotográficas, tanto en exteriores como en interiores. Las tomas videográficas exteriores se hicieron en el Paseo de Canalejas frente a la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, España, y las interiores en el Seminario 9 de la Facultad de Educación de la mencionada universidad. Asimismo, se efectuaron fotografías de la fachada del Colegio Milagro de San José en el Paseo de San Antonio, Salamanca.

Post-Producción: Una vez realizadas las fotografías y grabaciones se procedió a la selección y edición de imágenes fijas y en movimiento. Las imágenes fijas fueron tratadas previamente con el software Adobe Photoshop. Se utilizó el programa Windows MovieMaker para la edición de las imágenes seleccionadas y construir el vídeo conductor. Posteriormente, se empleó el software hyperfilm para la realización final del Hipervídeo propuesto. Se procedió de la siguiente manera para la edición y producción del recurso mencionado:

1. Se abrió un nuevo proyecto y se capturó el vídeo conductor. La figura 3 muestra la interface del software hyperfilm cuando se realiza la acción descrita.

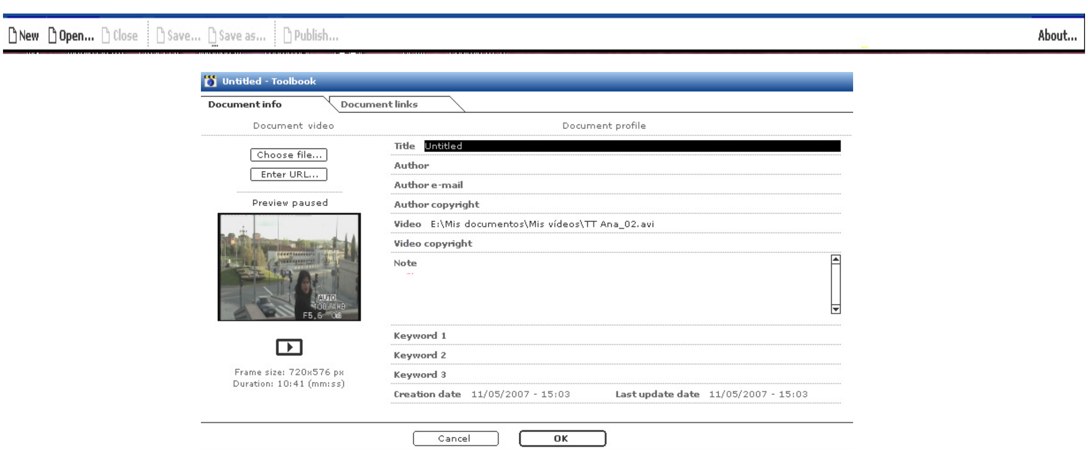


Figura 3*: Pantalla Toolbook del Hyperfilm*

2. Se comenzó el proceso para crear los hipervínculos escogiendo la opción ok de la pantalla de toolbook. Escogida la opción el software hyperfilm abrió la pantalla mostrada en la figura 4.

Figura 4: *Pantalla previa para la selección de hipervínculos.*

3. Para insertar un vínculo al vídeo conductor, se seleccionó la opción New link… , y se importó dicho archivo. Este proceso se repitió para cada uno de los vínculos que estaban establecidos en el guión. La figura 5, muestra la interface de Hyperfilm cuando se realiza esta acción

Figura 5*: Pantalla de selección de hipervínculos.*

4. Finalmente, se graba el proyecto como película utilizando la opción Publish del Menú Principal. En ese momento, el software Hyperfilm genera un archivo ejecutable, que cuando se abre la pantalla es similar a la que muestra en la figura 6.

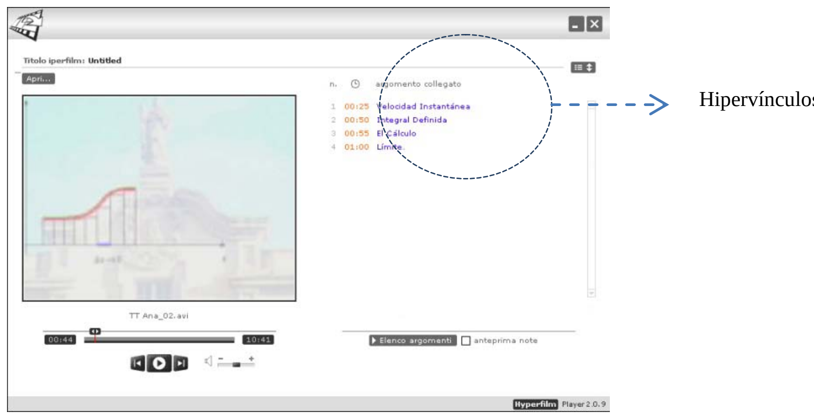


Figura 6: *Pantalla del archivo ejecutable generado por Hyperfilm*

Para cerrar esta fase del trabajo se elaboró la Guía Didáctica que acompaña al recurso didáctico, que según Nadal y Pérez (1991) debe contener las características más significativas (datos técnicos, duración, nivel, etc.), objetivos, sinopsis de los contenidos, transcripción del texto, materiales y actividades complementarias, sugerencias de utilización didáctica y bibliografía.

Evaluación

Otro aspecto importante y fundamental, luego de la elaboración del recurso, es la evaluación. Dado la novedad del recurso, no se halló con facilidad un instrumento que califique el producto didáctico. En este sentido, se propone elaborar un instrumento de evaluación que sirva tanto para valorar el Hipervídeo diseñado, como de propuesta evaluativa para futuros recursos que tengan estas mismas características.

Conclusiones y Recomendaciones

En cuanto al diseño del Hipervídeo: La novedad del recurso mencionado, determina la necesidad de generar un procedimiento específico para la elaboración de hipervídeos, partiendo de los lineamientos de la producción de medios audiovisuales de carácter didáctico en general. Luego de haber experimentado el proceso de desarrollo del hipervídeo, se considera que una vez el docente cuente con el vídeo conductor y los enlaces, la realización del mismo no presenta complicaciones mayores.

En cuanto al uso del Hipervídeo en la Enseñanza del Cálculo: Se considera que la potencia del recurso viene dada porque se convierte en administrador del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que con el vídeo conductor se mantiene la secuencia formal propia de la rigurosidad matemática, orientando al estudiante en cuanto a la organización de las ideas; y con los hipervínculos se refuerzan tanto los aspectos propios del contenido que se está tratando como de cualquier otra información o tarea que se estime en el diseño del recurso.

En cuanto a Investigaciones futuras: Estimular experiencias de investigación con cursos piloto donde se utilicen hipervídeos en la educación, particularmente en la enseñanza de la Matemática, que permitan ratificar que el uso didáctico de este medio informático, potencia aprendizajes significativos.

Referencias

Bartolomé, A. (2004). Vídeo Digital en la Enseñanza. *Bordón: Revista de Orientación Pedagógica*, 56(3 y 4), 559-571.

Cabero, J. (2001). *Tecnología Educativa. Diseño y utilización de medias en la enseñanza*. Barcelona: Editorial Paidós.

Cabero, J. (2007). El vídeo en la enseñanza y formación. En J. Cabero (Coord.), *Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación* (pp. 129-149). Madrid: Mc Graw Hill.

Camós, C. y Rodríguez, M. (2012). Las conversiones entre los registros verbal y simbólico en el aprendizaje del límite funcional. En D. Veiga (Ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 138-141). Buenos Aires: SOAREM.

Clemente, M (1995). Seleccionar Contenidos: Opción Cultural o Decisión Técnica. *Enseñanza*, 13, 261-274.

Colombano, V. (2012). Imágenes conceptuales sobre límite funcional en estudiantes de profesorado de matemática. En D. Veiga (Ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática* (pp. 105-112). Buenos Aires: SOAREM

Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: Implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos. Resúmenes 2012. VI Coloquio Internacional. Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú

García-Valcárcel, A. (2008). El Hipervídeo y su potencialidad pedagógica. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa* [Revista en línea], 7(2), 69-79. Disponible: http://campusvirtual.unex.es/cala/editio/ [Consulta: 2009, Marzo 25]

González, M. S., Albergante, S. y Sottile, A. (2005, Septiembre). *Hipermedia Adaptativa en la enseñanza-aprendizaje de procesos de optimización*. Ponencia presentada en el I Congreso de Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) en la Enseñanza de las Ciencias, La Plata.

HiperVideoStudio. (2007). [Página Web en línea]. Disponible: http://www.hipervideo.benitoestrada.net [Consulta: 2007, Enero 23]

Hyperfilm 2004 – 2005 [Programa de computación en línea]. R.E.A. di Torino. Disponible: http://www.hyperfilm.it [Consulta: 2006, Marzo 25]

Montenegro, F. y Díaz, M. (2012). Visualización con geometría dinámica como estrategia de enseñanza-aprendizaje en los conceptos de vectores en el plano. En D. Veiga (Ed.), *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática*(pp. 365-369). Buenos Aires: SOAREM

Nadal, M. y Pérez, V. (1991). *Los medios audiovisuales al servicio del Centro Educativo*. Madrid: Editorial Castalia y Ministerio de Educación.

Romero, J. y Villena, J. (2007). Creatividad didáctica hipermedia y multimedia. En J. A. Ortega y A. Chacón (Coords.), *Nuevas Tecnologías para la Educación en la Era Digital*(pp. 293-306). Madrid: Ediciones Pirámide.

Sepúlveda, A., Vargas, V. y Escalante, C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas* [Revista en línea], 82, 65-87. Disponible: http://www.sinewton.org/numeros/ [Consulta: 2014, Abril12]

Stahl, E., Finke, M. y Zahn, C. (2006). Knowledge Acquisition by Hypervideo Design: An Instructional Program for University Courses. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 15(3), 285-302.

Tall, D. y Mejia, J. (2004). *Reflecting on Post-Calculus-reform* [Documento en línea].Disponible:

http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004b-tall-meija-icme.pdf [Consulta: 2006, Noviembre 13]

Tall, D., Smith, D. y Piez, C. (2001). *Technology and Calculus* [Documento en línea]. Disponible:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002z-tech-calc-smith-piez.pdf [Consulta: 2006, Noviembre 9]

Yolimar Goatache Llovera.

Doctora en Tecnología Educativa por la Universidad de Salamanca, España. Asimismo, es Profesora de Matemática y Magíster en Enseñanza de la Matemática egresada de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Se desempeña como profesora adscrita a la Cátedra de Matemática y Computación de la Facultad de Agronomía de la Universidad Central de Venezuela. Entre sus trabajos, se mencionan: *Curso de Matemática I Asistido por DERIVE, Un Entorno Virtual para el Curso de Matemática I de la Facultad de Agronomía y El Hipervideo en Entornos de Aprendizaje: Una propuesta para la Enseñanza del Cálculo en el ámbito universitario.* Ha participado en diferentes Eventos Científicos auspiciados por la Universidad Central de Venezuela, Universidad de Carabobo, Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada y Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Aprendizaje de la estadística con recursos no tradicionales

Celina Espinoza, Carol Omaña,
José Fernández

Aprendizaje de la estadística con recursos no tradicionales

Introducción

En este estudio, es propio ubicar el contexto que impulsó el uso de la tecnología, y muy especialmente la incorporación, en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, de un recurso didáctico como lo es el video didáctico.

En cuanto a este aspecto, Fernández-Batanero y Gravan (2010) expresan:

> En la actualidad, el mundo ofrece a nuestros alumnos tantas oportunidades para desarrollarse intelectual y culturalmente que todo profesor debería prestar especial atención a la realidad social y tecnológica en la que viven los estudiantes. Participar y aprender cómo es el mundo que nos rodea no es sólo una tarea de los alumnos, ahora mismo y, debido a los continuos cambios e innovaciones, sino una obligación de los profesores (p. 9).

Formamos a los estudiantes para un mundo diferente al transitado por nosotros, esto representa que la metodología y los recursos empleados para su enseñanza y aprendizaje en el área de matemática y estadística no deben quedarse aferrados al pasado y es urgente una formación, en la cual el aprendizaje de los alumnos sea permanente, creativo y autónomo.

Al respecto en palabras del autor Rosario (2013):

> Con el advenimiento de los microcomputadores al final de la década de los 70 e inicio de los 80, se inicia un proceso de diseño y desarrollo de material instruccional basado en las computadoras. La inclusión de multimedia (texto, animación, gráficos, sonidos, videos) para el desarrollo de estos materiales instruccionales, produce un impacto en el sector educativo ya que a través de estos materiales, el estudiante/usuario es capaz de navegar, interactuar, crear y comunicar conocimientos (p.108).

Lo descrito con anterioridad, permite a los docentes ilustrar las actividades académicas con ejemplos de la vida diaria; el alumno trae una estructura cognitiva previa que a través del video puede propiciar un aprendizaje significativo. En ese ajuste y adaptación a los nuevos retos de esta sociedad, como lo señala (Cabero, 2007) "una sociedad donde aprender a aprender es de máxima importancia" (p.3), es que se diseñó y evaluó un video didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la estadística con el propósito de impulsar en la Escuela de Administración Comercial y Contaduría Pública, Campus La Morita de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo un recurso didáctico que estimule la atención del alumno a través de la vista, el oído o ambos y permita diseñar nuevos entornos de aprendizajes.

Metodología

1ª Fase: Revisión Documental

En los aspectos teóricos de la investigación realizada destacaron: Sociedad del conocimiento e información, características de la sociedad del conocimiento, las nuevas tecnologías o tecnologías de avanzadas de la información y comunicación (TIC), uso de las tecnologías de la información y comunicación, el docente universitario en la sociedad del conocimiento; diseño, producción y evaluación del video didáctico y la enseñanza- aprendizaje de la estadística.

2ª Fase: Diseño del video didáctico

Esta segunda fase consistió en el diseño del video didáctico. Se retomaron las ideas de: Cabero (2001), Galán (2006), Salinas (2007) y Fernández-Batanero y Gravan (2010), en cuanto a considerar para la etapa del proceso del diseño de un video didáctico el diseño, producción, posproducción y evaluación.

Galán (2006) señala como primer paso a la hora de realizar un proyecto didáctico: "*Organizar todo el material que se posee, estructurándolo en función de un tema y unos objetivos y estableciendo las herramientas y los canales que se emplearan para tal fin*" (p.1). Adicionalmente esta autora describe las etapas fundamentales en la creación de cualquier proyecto didáctico: Planificación y realización.

Galán (2006) señala como primer paso a la hora de realizar un proyecto didáctico: "*Organizar todo el material que se posee, estructurándolo en función de un tema y unos objetivos y estableciendo las herramientas y los canales que se emplearan para tal fin*" (p.1). Adicionalmente esta autora describe las etapas fundamentales en la creación de cualquier proyecto didáctico: Planificación y realización.

La planificación

En la planificación es necesaria la elaboración: (a) De un plan didáctico y (b) el plan de producción.

(a) El Plan didáctico: El plan didáctico se refiere a la selección del medio que se va a emplear y la elaboración de los tres guiones: contenido, didáctico y técnico.

Guión de contenido: presentar de la forma más esquemática posible aquello que se desea comunicar. En la unidad desarrollada, titulada medidas de forma, estos fueron los aspectos desarrollados:

- Introducción del tema y manejo de términos básicos.
- Problemas de aplicación en el área de la administración y contaduría pública.
- Repaso de la unidad.
- Problemas de reforzamiento del contenido desarrollado.

Guión didáctico: Muestra el contenido totalmente desarrollado. Este guión didáctico es como la fase uno del diseño del instructivo expresado por Salinas (2007) donde señala que: "En el proceso de diseño es necesario el análisis de la situación. Este análisis incluye los siguientes aspectos: Identificación del contenido sobre el que tratará el material, delimitación de la audiencia, identificación de destrezas a emplear, equipamiento disponible" (p.51).

Respecto a este aspecto, Cabero (2001) señala que: "no debemos olvidar que la concreción del diseño estará en estrecha relación con la teoría didáctica y psicológica de la que partamos" (p.368). En el diseño de este material audiovisual didáctico parte de una teoría psicológica conductista, se descompone la información en unidades simples, tiene una secuencia progresiva y hay un reforzamiento de la información. A continuación se especifica una parte del guion didáctico de uno de los temas desarrollados:

Guión Didáctico del material audiovisual didáctico elaborado: *Video didáctico de las medidas de forma*

Tema: Medidas de Forma

Objetivo General: Calcular e interpretar las medidas de forma, en una serie de datos.

Objetivos Específicos

- Calcular e interpretar el Coeficiente de Asimetría
- Describir algunos aspectos del Coeficiente de Asimetría
- Calcular e interpretar el Coeficiente de Curtosis
- Describir algunos aspectos del Coeficiente e Curtosis

Lugar: Laboratorio de Estadística Aplicada de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua.

Materiales: Equipo de proyección de video, laptop, pantalla.

Audiencia a quien va dirigido: Alumnos cursantes del sexto semestre de la asignatura de Estadística III, de la Escuela de Administración Comercial y Contaduría Pública de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua.

Luego se va especificando cada contenido con sus respectivos datos y cálculos.

En el mismo orden de ideas, respecto a la didáctica, es importante citar a Batanero (2001), quien señala: “*No tenemos teorías específicas sobre el aprendizaje de la estadística, deberemos acercarnos al área que nos es más próxima y analizar las tendencias recientes sobre la enseñanza de la matemática*” (p. 5*)*. En este momento, es importante citar a Gómez (1999), porque en el área de matemáticas han surgido posturas de diferentes autores en cuanto a cómo enseñar esta asignatura y de una manera similar sucede en la materia estadística.

El autor antes citado reflexiona acerca de cómo deberían enseñarse las matemáticas y en el cual él expresa que ante esta pregunta hay diversas opiniones fundamentadas en tres líneas:

> La epistemológica (qué clase de Matemáticas queremos que aprendan los niños o cuáles deben ser las Matemáticas escolares), la psicológica (cómo creemos que se aprende o cómo se adquiere o produce el conocimiento) y la metodológica (cómo se debe enseñar o cómo llevar adelante la enseñanza). Cada una de estas líneas se apoya en las otras y dentro de ellas el contraste de pareceres es manifiesto (p.59).

La postura de los autores de esta investigación tiende hacia una enseñanza basada en situaciones de la vida diaria, que el estudiante universitario se enfrente en la asignatura estadística a datos reales, ejemplos específicos, los cuales pueden ser creados en el mismo contexto del ambiente de clase e inclusive con artículos de la prensa diaria.

Guión técnico: Comprende en aquellas consideraciones relativas a la realización del material. De una manera sencilla, el guion técnico de este material audiovisual fue presentado en dos columnas. Una columna presenta la imagen que se desea visualizar en la pantalla y en la otra columna el audio.

(b) **El plan de Producción**

En este aspecto, Salinas (2007) señala que es necesario llevar un plan y temporalización del proceso de desarrollo. Llevar a cabo un plan del proceso de diseño, desarrollo, aplicación y evaluación, el cual permite al diseñador tomar conocimiento de: los recursos necesarios, el tiempo preciso para la realización del proceso y el presupuesto. Para la producción de este video didáctico en cuanto a la elaboración de los guiones de contenido y didáctico, evaluación de esta unidad llevó un año.

La Realización

Galán (2006) establece que, en este aspecto, es significativo destacar:

a) La producción. Aquí se confecciona el guion técnico; éste contenía el lenguaje audiovisual de carácter técnico para su grabación.
b) La post-producción: aquí se incluye todos los elementos accesorios, se incluye animaciones, rótulos, efectos de sonido, animaciones. En la postproducción, el técnico realizó este trabajo.

3ªFase Desarrollo del material audiovisual didáctico

Cabero (2007) señala que:

> Se puede utilizar, desde materiales domésticos donde uno de los videos deberá tener un botón de AUDIO-DUB o AUDIO-DUBBING, para que una vez editada la banda de la imagen, se pueda sobre ella cambiar el sonido sin que se vea afectada la primera y los nuevos sistemas de edición no lineal, donde la edición se realiza directamente sobre el ordenador sin la necesidad

> de magnetoscopios o cámaras de registro. Estas ediciones no lineales se llevan a cabo a través de software informático específico los más utilizados a nivel no profesional son: Adobe Premier, Alead Media y "Pinnacle Studio" versión 9 (p.137).

El material audiovisual didáctico diseñado en esta investigación utilizó una edición no lineal a través de software informático "Pinnacle Studio" versión 9. Con este software se sigue un sencillo proceso de:

Captura: En primer lugar se debe grabar el video en el disco duro del PC.

Editar: Después se coloca las escenas del video en el orden establecido y se elimina la escena que no sea deseada. Se puede realizar efectos visuales con transiciones, títulos, gráficos así como efectos de sonido y música de fondo.

Hacer el video: Crea la película final con el formato y los medios almacenados deseados.

4ª Fase. Elaboración de cuestionario para la validación de material audiovisual didáctico

Técnica e Instrumento Utilizado

Las técnicas de recolección de datos comprenden procedimientos y actividades, las cuales permiten al investigador obtener la información necesaria para dar respuesta a su pregunta de investigación. El instrumento permite recoger la información y es un soporte que permite conservar los datos suministrados por los encuestados. En este estudio la técnica utilizada fue la encuesta a través de un instrumento que fue el cuestionario. Éste permitió recopilar información referida al material audiovisual didáctico elaborado.

Asimismo, en cuanto a instrumento se refiere, Hurtado (2000) expresa lo siguiente: "En una investigación se puede utilizar un instrumento ya elaborado, disponible, con estudios de confiabilidad y validez realizados por otros investigadores, en cuyo caso, el investigador tiene la posibilidad de adaptar el instrumento al contexto" (p. 429). Es significativo destacar que en esta investigación se aplicó un instrumento que ha sido utilizado en otras investigaciones referidas a medios audiovisuales, principalmente el video didáctico. En España hay grupos de investigación que han realizado estudios referidos a los medios audiovisuales y especialmente instrumentos que evalúan el material audiovisual didáctico. El primero de los instrumentos presentados fue la propuesta de valoración Grupo DIM (2003), el segundo de los instrumentos presentados fue el de Fernández-Batanero (1999) y el tercer instrumento presentado fue el del profesor Pere Marqués (2001). Por eso, un paso inicial al instrumento seleccionado para este estudio fue que se sometió los tres instrumentos a consideración de tres docentes con experiencia en tecnología e investigación con el propósito de solicitar su recomendación en cuanto al uso de uno de esos instrumentos para esta investigación. Los docentes entrevistados recomendaron de acuerdo a los objetivos que persigue esta investigación el de Pere Marqués.

Este aspecto fue valioso para esta investigación lo cual constituye una validez de contenido. La validez del contenido trata de determinar hasta dónde los ítems de un instrumento son representativos del contenido que se quiere medir. Al respecto Ruiz (2002) señala:

> La validez de contenido no puede ser expresada cuantitativamente, a través de un índice o coeficiente; ella es más bien cuestión de juicio. Es decir, la validez de contenido por lo general, se estima de manera subjetiva o intersubjetiva. El procedimiento más comúnmente empleado para determinar este tipo de validez se conoce con el nombre de juicios de expertos (p.76).

Justificación del Instrumento

En el instrumento utilizado para recopilar información, destaca: Aspectos funcionales y de utilidad, aspectos técnicos, estéticos y expresivos, aspectos pedagógicos, preguntas abiertas, dimensiones y categorías y evaluación global. El instrumento fue auto administrado, el cual permitió a los participantes recibir directamente el cuestionario. En cuanto a las preguntas cerradas su propósito fue que el participante marcara con una X la alternativa que mejor se ajustó a su respuesta y para esta investigación fue más fácil codificar la información. No requieren que el encuestado escriba la respuesta, no tienen que escribir o verbalizar pensamientos sino únicamente seleccionar la alternativa que describa mejor su respuesta. Las preguntas abiertas tienen como propósito profundizar la opinión que tienen los alumnos, docentes y especialistas en tecnología en cuanto a la utilización en el entorno educativo del medio audiovisual didáctico.

5ª Fase. Evaluación del video didáctico

Prendes (2007**)** expresa que:

> En cualquier experiencia de uso de medios ha de considerarse la evaluación del medio en sí mismo. Esta evaluación es fundamental considerarla con carácter inicial, pues es necesario antes de seleccionar un medio analizar detenidamente sus características y sus posibilidades. Pero también el proceso y los resultados finales pueden servir para obtener datos del medio y tomar mejores decisiones en situaciones futuras (p.228).

En esta investigación se evaluó el video didáctico en una versión preliminar y en una versión definitiva. En la primera versión y segunda se consideró: La evaluación del equipo de producción, evaluación de expertos en contenido y tecnología y los alumnos.

Este instrumento de Pere Marqués (2001) fue aplicado a los expertos en tecnología, expertos en contenido y alumnos de las secciones del turno de la mañana y noche.

Selección de expertos

El proceso de selección de los expertos tanto en tecnología como en contenido fue intencional. En cuanto al muestreo intencional (Rojas, 2007) señala: “Un muestreo intencional su propósito es seleccionar sujetos que puedan aportar información relevante para un estudio en profundidad. El muestreo responde a la dinámica de la investigación” (p.66).

Entre los criterios que poseen los expertos seleccionados se destacó la presencia de las características que lo hacen reconocible como experto en el área seleccionada, disponibilidad en el tiempo adecuado para realizar la evaluación y disposición para participar en este trabajo de investigación.

Selección de alumnos primera versión y segunda del material audiovisual didáctico

La selección de la muestra fue intencional, se trabajó con las dos secciones asignadas por la cátedra. Entre las características presentes en los sujetos participantes se puede mencionar: Ser cursante de la asignatura Estadística III y disposición para la evaluación del video didáctico luego de su visualización. Los alumnos participantes fueron 30 en la primera versión y 30 en la segunda versión del material audiovisual didáctico.

6ª fase: Ajustes, corrección del material audiovisual didáctico.

En la segunda versión contenía los ajustes en cuanto a tamaño de la letra, color, sonido, se ajustó a las recomendaciones dadas por los expertos en contenido, en tecnología y alumnos.

Resultados

Es importante presentar los resultados de la evaluación del video didáctico elaborado, por motivo de espacio del artículo, sólo se presentan algunas opiniones.

En la *Primera versión del video didáctico* se destacó:

Categoría eficiencia y ventajas con otros medios: los docentes expertos en contenido opinaron que este medio audiovisual es didáctico, el contenido es bastante dinámico con este medio audiovisual, útil como medio visual y auditivo al mismo tiempo y permite la comprensión más rápida de los alumnos acerca del tema.

Los expertos en tecnología opinaron que este medio audiovisual es didáctico, el contenido es bastante dinámico con este medio audiovisual, importante como ayuda a los alumnos que presentan problemas en este contenido.

Los alumnos manifestaron que este medio audiovisual es didáctico, atractivo, motivador, estimula el interés, eficiente. Se visualiza, se aprende y se comprende mejor el tema, mejora el aprendizaje y reafirma el conocimiento.

Categoría problemas e inconvenientes: Los docentes especificaron que es significativo destacar la falta de equipos audiovisuales en el departamento, incluir más láminas de contenido, necesidad de material adicional para reforzar el tema tratado y las condiciones ambientales deben ser óptimas para la buena utilización del medio.

En cuanto a los expertos en tecnología señalaron que no se debe ser repetitiva en ciertas expresiones, incluir un mayor número de láminas de contenido, el sonido distorsiona algunas presentaciones y láminas de fórmulas con más colorido, no dejar por tiempo prolongado de imágenes.

Los alumnos expresaron: incorporar más textos en láminas, se debe mejorar el audio, el aula posee mucha iluminación, mejorar la descripción del contenido, en un momento va muy rápido y en otro momento muy lento y agregar más láminas de imágenes.

Categoría a destacar: los docentes visualizaron que este medio es un esfuerzo digno de reconocer para mejorar el proceso de enseñanza, el contenido es bastante completo con relación al tiempo de desarrollo, buen reforzador de la enseñanza y un medio audiovisual dinámico, visual y auditivo.

Los expertos en tecnología mencionaron que este medio tiene excelente sonido y narración, el contenido es bastante completo con relación al tiempo de desarrollo, la presentación tiene buena frecuencia y está bien elaborada para el alumnado, dinámico, didáctico, buena iniciativa.

Respecto a los alumnos, ellos destacaron que el video es motivador, original, claro, didáctico y comprensible. Refuerza los conocimientos, de alta calidad y excelente presentación clara y precisa.

En la *Segunda versión (definitiva)* del material audiovisual didáctico

Categoría eficiencia y ventajas con otros medios: los docentes opinaron que este medio audiovisual es didáctico, permite visualizar aspectos que no se evidencian con otros medios, complementa la enseñanza de la estadística y permite que los alumnos tengan acceso a la información de una forma rápida y precisa.

Los expertos en tecnología dieron a conocer que este medio audiovisual es didáctico, utiliza el medio visual y audio al mismo tiempo, permite que los alumnos tengan acceso a la información de una forma rápida y el contenido es presentado de una forma muy organizada y esquematizada.

Los alumnos señalaron que este medio audiovisual es didáctico, dinámico, ilustrativo, diferente y no cotidiano, moderno. Da buena cantidad de información en poco tiempo. Es un buen recurso de enseñanza - aprendizaje para introducir la historia y evolución de la estadística, fácil percepción y entendimiento, rápida comprensión del tema.

Categoría problemas e inconvenientes: Los factores externos, como falla eléctrica no permitiría el uso del computador, también se da conocer que este medio dificulta el diálogo mientras dura su presentación, las condiciones ambientales deben ser óptimas para la buena utilización del medio.

Categoría a destacar: los docentes expertos en contenido disciplinar expresaron que en este medio audiovisual el contenido es bastante completo con relación al tiempo de desarrollo, mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje, se utiliza ejemplos para reforzar la teoría y es un aporte motivador en el desarrollo de esta técnica de enseñanza. Esto se enlaza con una visión de la enseñanza de la estadística donde se privilegia el accionar del estudiante en el logro de los objetivos de aprendizaje.

Los expertos en tecnología señalaron que este medio audiovisual tiene excelente sonido y narración, la presentación tiene buena frecuencia y bien elaborado para el alumnado. Es importante complementar este medio audiovisual con un material adicional para reforzar el tema y es un aporte motivador para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los alumnos expresaron que este medio audiovisual es un buen método de enseñanza y aprendizaje, el material audiovisual didáctico y la discusión es buena, una buena idea de plasmar conocimiento y ayuda a la creatividad.

Evaluación Global

En cuanto a la evaluación global del material audiovisual didáctico:

En la primera y segunda versión los alumnos y docentes manifestaron una tendencia hacia la alternativa muy bien, los expertos en tecnología opinaron que el material audiovisual didáctico es excelente.

Conclusión

Es significativo destacar que el uso del video didáctico para la enseñanza de las medidas de forma en la Escuela Contaduría Pública y Administración Comercial de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua, de acuerdo a las opiniones de los docentes expertos en contenido permite visualizar aspectos teóricos que no se evidencian con una enseñanza magistral. Complementa la enseñanza de la estadística de una manera didáctica y permite que los alumnos tengan acceso a la información de una forma rápida y precisa en cuanto al manejo de términos básicos estadísticos**,** el cual es el objetivo de esta primera unidad.

Los alumnos en cuanto a la enseñanza y aprendizaje destacan que el uso del video didáctico para la unidad didáctica antes mencionada les permitió la rápida comprensión del tema por ser didáctico, dinámico, ilustrativo diferente y no cotidiano, moderno. Da buena cantidad de información en poco tiempo.

Los expertos en tecnología entrevistados manifestaron que es un material adicional para reforzar el tema y es un aporte motivador para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad didáctica antes mencionada.

Implicaciones

Fernández-Batanero y Gravan (2010), expresa: “Son muchos los docentes que se presentan como profesionales analógicos, sus clases tienen la misma metodología que las lecciones que se impartían 50 años” (p. 9); actualmente el uso de nuevas tecnologías nivel de docencia implica un cambio de estrategia de enseñanza en la asignatura estadística, en la carrera de Contaduría Pública y Administración Comercial de la Universidad de Carabobo, Núcleo Aragua, motivado a que normalmente el contenido programático de la asignatura se desarrollaba de una manera magistral. El diseño y desarrollo de un video didáctico crea un ambiente de aprendizaje más dinámico, porque el docente lo puede utilizar al inicio de la actividad académica para motivar el acto académico o al final de la actividad académica para reforzar el aprendizaje.

Lo importante es que el docente puede diseñar un ambiente de aprendizaje donde puede parar en un momento determinado el material audiovisual para especificar un determinado contenido, intercambiar ideas con el alumnado y adicionalmente promover un aprendizaje significativo motivado a los ejemplos cotidianos a los que se puede crear con el alumnado. Esta experiencia permite trabajar con una cantidad numerosa de alumnos.

A nivel de alumnos implicó promover en ellos la enseñanza – aprendizaje del contenido programático de la asignatura estadística descriptiva de una manera dinámica, didáctica, especifica, creativa, motivadora y muy original.

Referencias

Batanero, C. (2001). Hacia dónde va la estadística. Presente y futuro de la educación estadística [Documento en línea]. Disponible: http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornadas_10_01/doc/Bataneromallorca.doc [Consulta: 2008, Agosto 24]

Cabero, J. (2001). Tecnología Educativa. Diseño y utilización de medios de enseñanza Barcelona, España: Editorial Paidós Ibérica, S.A.

Cabero, J. (2007). (Coord.) Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación. Madrid, España: Editorial Mc Graw Hill.

Fernández-Batanero, J. M. (1999). Evaluación de materiales educativos producidos institucionalmente en educación para el consumo, en los niveles de educación primaria y E.S.O. Revista Píxel –Bit, 13. Disponible: http://tecnología edu.us.es [Consulta: 2007, Abril 17]

Fernández-Batanero, J. M. & Gravan, P. (2010). Edición del video digital para profesores. España: Editorial MAD.

Galán, E. (2006). El guión didáctico para materiales Multimedia. Espéculo. Revista de Estudios Literarios. XII (34). Revista Digital Cuatrimestral, Universidad Complutense de Madrid. Disponible: http://pendientedemigracion.ucm.es/info/especulo/numero34/index.html [Consulta: 2007, Abril 17]

Gómez, B. (1999). Las Matemáticas y el proceso educativo. En Gutiérrez, A (ed.), Área de conocimiento Didáctica de la Matemática. (pp. 59-104, 1ª reimpresión). Madrid: Editorial Síntesis.

Hurtado, J. (2000). Metodología de la Investigación Holística. Caracas: Fundación Sypal.

Pere Marqués, G. (2001). Evaluación de Videos [Documento en línea]. Disponible: http://dewey.uab.es/pmarques [Consulta: 2007, Marzo 22]

Prendes Mª. (2007) Internet aplicado a la educación: estrategias didácticas y metodologías. En Cabero. J. (Coord.), Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación. España: Editorial Mc Graw Hill.

Rojas, B. (2007). Investigación Cualitativa. Fundamentos y Praxis. Caracas: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Rosario, H. (2013). El proceso de desarrollo de un material instruccional mediado por tic. Elaboración del proyecto en material instruccional computarizado.

En Rosario, H. (Coord.), Material instruccional computarizado. Herramientas TIC aplicadas a la educación diseño y desarrollo. Valencia, Venezuela: Dirección de Medios, Universidad de Carabobo.

Ruiz, C. (2002). Instrumentos de Investigación educativa. Procedimientos para su diseño y validación. Caracas: Centro de investigación y desarrollo en educación y gerencia.

Salinas, J. (2007). Bases para el diseño, la producción y la evaluación de procesos de enseñanza-aprendizaje mediante nuevas tecnologías. En Cabero. J. (Coord.), Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación. España: Editorial Mc Graw Hill.

Celina Espinoza García.

Doctora en Educación por la Universidad de Sevilla, España. Magister en Educación y Licenciada en Educación, mención Matemática por la Universidad de Carabobo (UC), Venezuela. Es parte del Programa de Estímulo a la Investigación e Innovación (PEII), Investigador A1. Entre sus trabajos publicados se tienen: 1) *Un material audiovisual didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la estadística*. "Revista Pixel Bit", (2012), 2) *Importancia del Software Estadístico en la Enseñanza y aprendizaje de la Universidad de Carabobo (Venezuela).* "Revista Aula de Encuentro" (2014). Ha presentado trabajos en varios eventos científicos.

Carol del Valle Omaña Reyes.

Magister en Docencia Universitaria, Especialista en Tecnologías de la Computación en Educación y Licenciada en Administración Comercial por la Universidad de Carabobo (UC). Diploma de Estudios Avanzado en el Doctorado Didáctica y Organización de Instituciones Educativas, Universidad de Sevilla, España. Es profesora Agregada a Dedicación Exclusiva, en la UC, Campus la Morita. Ha sido tutora y jurado de trabajos de grado de pregrado y postgrado. Ha realizado presentaciones en varios eventos de carácter nacional e internacional. Es Jefa del Departamento de Auditoria, Impuesto y Sistema de Información de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (Faces), Campus La Morita.

José Mª Fernández-Batanero.

Profesor titular del área de Didáctica y Organización Educativa, en la Universidad de Sevilla (España). Director académico del Máster "Educación Inclusiva. Formación y respuesta educativa en contextos de diversidad". Docente con 6 Diplomas a la "Excelencia Docente Universitaria", otorgados mediante Resoluciones Rectorales de la Universidad de Sevilla, e insignia de Oro de la ciudad de Sevilla (España). Ha impartido docencia en Universidades de Italia, Portugal, Bolivia, México, República Dominicana y Venezuela. Evaluador de la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva (ANEP), del Ministerio de Educación y Ciencias Español. Tiene publicado una decena de libros y más de 80 artículos en revistas de impacto.

La enseñanza de la matemática en ingeniería

Luis E. Capace Pérez

La enseñanza de la matemática en ingeniería

Introducción

Desde sus inicios la ingeniería y la matemática han establecido una dupla que ha sido de provecho para el progreso de ambas disciplinas; la ingeniería provee problemas de fenómenos reales a la matemática y ésta le ha permitido a la primera tener una herramienta marco con la cual ha experimentado un crecimiento constante en la solución de muchos problemas técnicos.

Para Dujet (2007), ya en 1648, René Descartes quería establecer en Francia las escuelas profesionales, en las cuales maestros hábiles en matemática y física respondieran todas las consultas de los artesanos para que comprendieran las cosas e instruirle para que pudieran, por ellos mismos, hacer nuevos descubrimientos en cada arte. Aquí tenemos un ejemplo de la necesidad de unir al pensamiento racional de la tecnología[1] y la matematización. Posteriormente a principio de la edad moderna, la tecnología se presenta como la ciencia de las relaciones del hombre con la producción[2] con lo que se logran esquemas operativos para las diferentes actividades. En la época post-moderna, la tecnología se entiende como la técnica del uso calculado basado en la simulación.

Ante esta situación cabe preguntar ¿La enseñanza de la matemática en las escuelas de ingeniería está acorde con los nuevos desafíos de ésta? ¿Cuánta y qué matemática se debe enseñar en ingeniería? ¿Cómo debe ser la enseñanza de la matemática en ingeniería? Recordemos que el ingeniero debe adaptarse a la sociedad y utilizar con destrezas las herramientas tecnológicas basadas en las nuevas teorías matemáticas que se han venido consolidando a través del tiempo. Carlos (2000) resume la necesidad de las matemáticas en la formación de ingenieros como sigue: a) La Matemática como herramienta de cálculo, b) Como herramienta para modelar y resolver problemas de ingeniería, c) Como lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional y d) Como herramienta para lograr el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar, de enfrentarse a situaciones nuevas. Es por eso que en este capítulo se indaga sobre el estado de la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería.

---

[1] La ciencia de las técnicas que constituyen la ciencia normativa de la producción de efectos (Dujet, 2007, p. 2).
[2] Acepción anglo-sajona.

Enseñanza de la matemática en ingeniería

Es claro que la enseñanza de la matemática en ingeniería confronta problemas reflejados en el número de aplazados en los primeros semestres de la carrera. Una evidencia cercana a la problemática de la repitencia, se presenta en el artículo: Preocupa Elevado Índice de Aplazados (2009, Noviembre 30). *Tiempo Universitario*, p.22, donde se expone una estadística del porcentaje de aplazados por cada profesor en el Ciclo Básico de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo. El índice de aplazados es hasta de 98%, lo cual pone al descubierto una situación de extrema anormalidad para una experiencia de enseñanza y aprendizaje de un semestre académico de duración. Por otra parte, los aprobados presentan conflictos al aplicar los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas técnicos; Capace (2008) destaca tres: a) La identificación del modelo matemático que rige la situación problemática, b) la selección de las herramientas matemáticas adecuadas al modelo y c) poca destreza en el manejo de las herramientas matemáticas. Lo cual es contrario a lo que debe realizar un ingeniero en su vida profesional, la cual Dujet (2007) la define de la siguiente manera:

> …el ingeniero no es ni un sabio ni tampoco un inventor; es un hombre de proyectos y debe llevar a cabo sus proyectos con la mayor eficacia y los mejores resultados posibles, todo esto dentro de un contexto socio-económico determinado. Para realizarlos, utilizará y pondrá en práctica sus conocimientos y competencias científicas y tecnológicas, desarrollados en base a los saberes (saber, saber hacer y saber ser) adquiridos durante su formación como ingeniero, incluyendo la indispensable enseñanza de las matemáticas (p. 4).

Para el estudio de esta problemática que sabemos compleja se utilizaran las seis dimensiones propuestas por Godino (2003), ya que ellas están presente en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemáticas, ellas son: *Epistémica*, *cognitiva*, *interaccional*, *mediacional*, *emocional* y *ecológica*.

Aspectos epistemológicos

Para una mejor enseñanza de la Matemática en las carreras de ingeniería, debe estar claro para los docentes y planificadores, ¿para qué utiliza la Matemática un ingeniero? Por ello se hace necesario profundizar en los aspectos epistémicos de los tópicos a enseñar y establecer experiencias de aprendizajes acordes con la carrera. Godino y Batanero (1994), señalan que el estudio epistémico es útil para clasificar la naturaleza de los objetos matemáticos en estudio y caracterizar los diversos significados que tiene para las instituciones y carreras de acuerdo a sus contextos. Además este estudio permitirá conocer aquellos problemas que sirvieron de motivación a su creación y posterior desarrollo, con la finalidad de elaborar procesos didácticos que permitan a los estudiantes una mejor comprensión de las matemáticas.

Es posible que el no profundizar en la naturaleza de los contenidos matemáticos y el contexto de la enseñanza, influyan en que las carreras de ingenierías estén abarrotadas de tantos contenidos matemáticos disconexos de las aplicaciones reales que los ingenieros hacen de ellos. Por otra parte, en la revisión de los currículos, es necesario que se actualicen los conocimientos matemáticos de acuerdo a las exigencias de las dinámicas de cambios de la tecnología; pues, se corre el riesgo de omitir tópicos necesarios y mantener en el tiempo con mucho énfasis otros que de momento no se aplican. Claro está, todo esto, sin desmejorar la racionalidad educativa que presenta la Matemática para su enseñanza. Rivaud (2004) resume esta problemática como sigue:

> Otra problema que se presenta con los cursos de matemáticas es que con el tiempo su número ha crecido desproporcionadamente; la razón de ello es que constantemente, en ingeniería, se usan nuevas teorías y técnicas matemáticas, y que sin pensarlo demasiado estos materiales se han organizado en nuevos cursos y se han incorporado a los programas, tal es el caso de matemática discreta, computación matemática, funciones especiales, y transformadas integrales, o derivadas parciales, por mencionar unos cuantos; sin duda muchos de estos temas son importantes pero como parte de la formación general del ingeniero bastaría con mencionarlos y trabajar algunos ejemplos. Curiosamente, en muy pocas ocasiones se eliminan cursos del programa (p.1).

Es por ello que, es recomendable, además de un buen estudio epistémico, una revisión permanente del currículo. En este sentido, también Rivaud (2004) señala, como otra situación problemática, que los cursos de matemáticas están siempre ubicados en la parte inicial de la carrera, con la promesa a los estudiantes que más adelante se verá la aplicación en asignaturas propias a su carrera; sin embargo, esto muy pocas veces ocurre porque los profesores de las disciplinas donde se pueden hacer las aplicaciones tienen otra formación. Esto crea la idea, en los alumnos, que las matemáticas son un obstáculo en su formación y no una herramienta básica para resolver problemas en su área de estudio. Es probable que identificando el significado institucional[3] mediante un análisis epistémico y una revisión curricular permanente se pueda enseñar las matemáticas en los momentos más adecuados de la carrera.

Aspectos cognitivos

El aprendizaje de los estudiantes es fundamental para el éxito de todo el proceso de enseñanza y éste es el mayor problema de la matemática en las escuelas de ingeniería. Uno de los aspectos que merece mayor atención, es la articulación entre la enseñanza media y la superior, donde hay necesidad de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades precedentes para poder enfrentar con éxito los nuevos contenidos. Para Deiros y Calderón (2001), no es suficiente que el docente actúe como facilitador del aprendizaje, también debe orientar y guiar la actividad de sus alumnos, aportando su ayuda de acuerdo con el momento del proceso de asimilación y al nivel de desarrollo de las habilidades en formación. Para esto es necesario planificar estrategias adecuadas.

Díaz Barriga y Hernández (1998) definen una estrategia de aprendizaje a todo procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un alumno adquiere y emplea de forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas.

Por otro lado, profundizando en las causas de los problemas del aprendizaje de los estudiantes, los métodos de estudios tiene una gran incidencia. Brito y Amado (2001) afirman que la carencia de hábitos de estudio puede ser otra de las principales causas de la reprobación y por ende de la repitencia en las instituciones de educación universitaria. Ahora ¿por qué los métodos de estudio son importantes en el éxito de los estudiantes? En el caso particular de la matemática, Posso, Gómez y Uzurriaga (2007) señalan que si el estudiante no desarrolla estrategias de aprendizaje adecuadas a la matemática, no alcanzará un nivel de pensamiento formal, lo cual es un obstáculo para el aprendizaje.

Respecto al aprendizaje, la Matemática requiere de diferentes representaciones para su compresión. Lara (1997) atribuye la claridad de un objeto matemático, por parte del estudiante, en gran parte al tránsito por los diferentes sistemas semióticos de representación y menciona del gráfico al numérico; del numérico al algebraico; del algebraico al gráfico; del verbal al gráfico;…etc. Sin embargo en

[3] De acuerdo con Godino (2003), el significado institucional se refiere al de la matemática como ciencia o al de la institución, en este caso lo que requiere un ingeniero en formación.

los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática no consideramos qué métodos de estudio puede adoptar el estudiante. Mora (2003) considera que la mayoría de los trabajos sobre Educación Matemática están vinculados a la enseñanza y muy pocos se refieren a los métodos de aprendizaje. En escasas oportunidades se ponen en práctica las ideas didácticas para el aprendizaje desarrolladas y validadas en los últimos años como: Resolución de problemas, la enseñanza por proyectos y estaciones, los procesos de modelación, entre otros.

Se pretende que el estudiante genere de forma espontánea los métodos de estudios y aprendizaje adecuados para las diferentes formas del conocimiento matemático. Esto puede ser una causa del bajo rendimiento, Gascón y Muñoz-Lecanda, Sales y Segura (2004), Fonseca (2004) y Artigue (2003) plantean que la problemática se hace visible en el paso de la formación secundaria a la universidad, en los estudiantes predomina la memorización y la repetición como método de estudio, al llegar a la universidad se le exige razonar de manera lógica y manejar adecuadamente las herramientas matemáticas para modelar y resolver problemas. Es por ello que se considera que la carencia de métodos de estudio adecuados a la matemática podría ser una de las causas de la repitencia en Matemática en los primeros semestres, trimestres y años en las escuelas de ingeniería.

Para el mejor seguimiento del aprendizaje de los estudiantes es necesario tener un sistema de evaluación con diversos instrumentos y estrategias de evaluación. En relación a la evaluación, la calidad de lo aprendido por el estudiante es uno de los elementos esenciales para una exitosa gestión universitaria. Para Diez (2008) en ocasiones resulta difícil evaluar el aprendizaje de los estudiantes en ingeniería según la reflexión de muchos profesores e investigadores, sobre todo si consideramos el perfil que debe tener el egresado, es decir: competente, independiente, responsable, exigente, honesto, disciplinado, capaz de realizar trabajos en grupo, analítico, comunicativo, con nivel crítico, autocritico y sentido de perfeccionamiento. Después de una revisión de diferentes trabajos y de información recabada de forma científica se señalan los siguientes aspectos, hallados en el proceso de evaluación de la matemática en ingeniería: a) En general los profesores de matemática tienen conceptos y concepciones empíricas sobre evaluación, b) Son escasos los instrumentos y técnicas para evaluar aprendizajes, c) poco se estimula la *autoevaluación* y la *coevaluación*, y d) las evaluaciones no siempre reflejan lo aprendido.

Según Becerra y Moya (2008), la evaluación de los aprendizajes tiene que responder a una concepción de lo procesos de *enseñanza* y *aprendizaje*, donde éstos deben darse de manera cohesionados e interactivos y donde el aprendizaje es un proceso constructivo. Así que la evaluación de los aprendizajes no puede ser entendida como la conclusión o el fin de un proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que debe estar presente en todas las etapas de éste, para su éxito.

Por lo señalado anteriormente, la evaluación del aprendizaje en Matemática en ingeniería puede influir en el aprendizaje de los alumnos.

Aspectos de la interacción

Cuando se desarrolla una actividad de enseñanza y aprendizaje de la matemática, necesariamente se producen diferentes interacciones entre: profesor-alumno, alumno-alumno, profesor-recursos, alumno-recursos, etc. Estas interacciones facilitan: a) La dinámica, para la negociación entre docente y alumno, que haga posible la solución de las diferentes situaciones problemáticas en relación a la enseñanza y aprendizaje, b) entre alumnos, la interacción debe favorecer el compartir de experiencias de aprendizaje y c) con estas interacciones y las diferentes formas de evaluación, se permite a todos los participantes y al docente percibir el progreso de los alumnos.

Es posible que las clases donde existan pocas interacciones entre los actores queden sin resolver, un cúmulo de problemas, tanto de la enseñanza como de aprendizaje, que no pueden resolverse sin el acuerdo de las partes. Esto puede estar ocurriendo en las clases de matemática en ingeniería.

Aspectos de la mediación

Para Godino, Contreras y Font (2006), un proceso de instrucción y cognición de la matemática es *Idóneo mediacionalmente,* si existe una valoración alta de la disponibilidad y adecuación de recursos materiales y temporales fundamentales para su desarrollo. En la actualidad los recursos informáticos, calculadoras y audiovisuales, además de estar en todos los aspecto de nuestra vida, pueden aportar múltiples bondades, si están insertos adecuadamente en los cursos de matemática en ingeniería. Al respecto, Deiros y Calderón (2001) señalan:

> Crear alternativas para un mejor aprendizaje, apoyadas en las computadoras y redes de telecomunicaciones, como núcleo alrededor del cual se agrupan las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones, de modo que se supere la mera transmisión de contenidos en la enseñanza y se

> proporcione un bagaje más versátil y adaptado a las demandas múltiples y cambiantes de las sociedades actuales, lleva hoy a diseñar con mucho cuidado los programas educativos que asimilan estas tecnologías, para lograr un buen resultado y además un equilibrio costo/beneficio que repercuta en la calidad y mejora de la educación (p.10).

En la actualidad la memorización no es lo más importante en el aprendizaje. Son las habilidades para buscar información, seleccionar la que se necesita y aplicarla en la resolución de problemas. De ahí que, se hace necesaria una formación diferente en la que se propicie comprensión, la comunicación, la autonomía en el aprendizaje. Se debe potenciar la capacidad de pensar, y de aprender. La mediación tecnológica es ideal, por el volumen de información que puede manejar y la interactividad con que se presenta para el desarrollo de estas habilidades. Sin embargo para que un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática pueda cubrir la mayor cantidad de expectativas planteadas es necesaria la diversificación de la mediación. Por ejemplo, la producción de material de apoyo (textos de prácticas, libros, presentaciones y/u otros.) propios a la formación matemática de un ingeniero y aplicado en problemas de su área de estudio, elaborados por sus profesores, haría más cercana la mediación.

Aspectos relacionados a lo emocional

Esta dimensión se vincula, de acuerdo a lo planteado por Godino (2003), a los estados de ánimos: interés o aversión por los temas o tópicos matemáticos objetos de estudios. En el siguiente cuadro se presentan componentes y descriptores útiles para planificar y valorar este aspecto en un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Cuadro 1
Componentes y descriptores para planificar y valorar el aspecto emocional

Componentes	Descriptores
Interés y necesidad	Tareas de interés para el alumno y que reflejen el valor de la Matemática en su carrera.
Actitudes	Actividades que favorezcan la responsabilidad y perseverancia, así como la necesidad de argumentar y comprobar por cuenta propia sus procedimientos y cálculos
Emociones	Promoción de la identificación de cualidades personales hacia la Matemática, como una manera de mejorar la autoestima, evitando el rechazo por la asignatura

El planificar tareas de interés para el estudiante y contextualizadas en función a su carrera y que promocionen su identificación con la matemática como una manera de mejorar su autoestima. Para Álvarez y Ruíz (2008), el desempeño docente sigue orientado hacia la transmisión dogmática de los contenidos programáticos, y consideran esta práctica, como la causante de la actitud negativa del estudiante por la matemática que, incluso, muchas veces llega hasta la hostilidad. Estas ideas equivocadas de la matemática en la carrera de ingeniería son contraproducentes, sobre todo, dificultad de entender la enorme utilidad de esta asignatura a lo largo de toda su formación y en su posterior actividad profesional.

Aspectos relacionados a lo ecológico

Muchas veces nuestras prácticas docentes están fuera de lo que realmente requieren las carreras de ingeniería y del perfil profesional del egresado, aún cuando los contenidos matemáticos que enseñamos estén previstos en los programas que conforman el currículo. En este caso estamos siendo poco ecológicos dentro del proceso de formación. La palabra clave es *Adaptación curricular* y depende en gran parte de: a) Que los contenidos implementados en nuestras clases estén dentro de los lineamientos del currículo, b) los contenidos son los necesarios para la formación profesional, c) se relaciona el contenido con las disciplinas propias a la carrera y otras afines y d) las innovaciones didácticas y el uso de nuevas tecnología son el producto de la reflexión de satisfacer las necesidades de la formación de acuerdo a la orientación curricular.

Conclusiones

Como se puede notar la problemática de la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería es compleja y causa repitencia, deserción, aversión, mala formación y bajo rendimiento. En resumen podemos considerar aspectos que son causas relevantes y persistentes.

Aspectos Epistémicos

1. El no profundizar en la naturaleza de los contenidos matemáticos y el contexto de la enseñanza, influye en que las carreras de ingenierías estén

abarrotadas de tantos contenidos matemáticos disconexos de las aplicaciones reales que los ingenieros hacen de ellos.

2. Los cursos de matemática están siempre en los primeros semestres, trimestres o años, por lo tanto se les promete a los estudiantes que más adelante se verá la aplicación en asignaturas propias a su carrera, pero esto muy pocas veces ocurre.

3. Es probable que mediante un análisis epistémico y una revisión curricular permanente se pueda enseñar las matemáticas en los momentos más adecuados de la carrera.

Aspectos Cognitivos

1. El docente además de facilitador del aprendizaje, también debe orientar y guiar la actividad de sus alumnos, aportando su ayuda de acuerdo con el momento del proceso de asimilación y al nivel de desarrollo de las habilidades en formación.

2. Si el estudiante no desarrolla estrategias de aprendizaje adecuadas a la matemática no alcanzará un nivel de pensamiento formal, lo cual es un obstáculo para el aprendizaje del pensamiento matemático; la carencia de métodos de estudio es otra de las principales causas de la repitencia.

3. Es necesario un sistema de evaluación con diversos instrumentos y estrategias que permitan al estudiante conocer la calidad de su aprendizaje.

En relación a la Interacción

1. En las actividades de enseñanza y aprendizaje de la matemática en ingeniería, muy escasas veces se producen diferentes interacciones entre: profesor-alumno, alumno-alumno, profesor recursos, alumno recursos, etc. El propiciar estas interacciones u otras enriquecen el proceso de enseñanza y promueve la construcción social del conocimiento.

En relación a la Mediación

1. La memorización no es lo más importante en el aprendizaje de un ingeniero. Son las habilidades para buscar información, seleccionar la que se

necesita y aplicarla en la resolución de problemas. La mediación tecnológica adecuada permite avanzar en este sentido.

2. También, se hace necesario el diseño y elaboración de material de apoyo congruente con formación matemática de un ingeniero y aplicado en problemas de su área de estudio, elaborados por sus profesores. Esto haría más cercana la mediación.

En relación a la motivación

1. Es necesario la planificación de tareas de interés para el estudiante y contextualizada en función a su carrera y que promocionen su identificación con la matemática como una manera de mejorar su autoestima. Cuando el estudiante se siente capaz de resolver situaciones más o menos complicadas, en matemática, su autoestima mejora.

2. Por lo general los profesores de matemática en las carreras técnicas son poco ecológicos, es decir; las prácticas docentes están fuera de lo que realmente requieren las carreras de ingeniería y del perfil profesional del egresado, aún cuando los contenidos matemáticos que se enseñan estén previstos en los programas que conforman el currículo.

Referencias

Álvarez, Y. y Ruíz, M. (2008). Actitudes hacia el Docente de Matemáticas en Estudiantes de Ingeniería. Ponencia presentada en IV Jornadas de Investigación e Innovación Educativa “Creatividad e Innovación en Contextos Socioeducativos de Cambios” 30 y 31 de Octubre 2008. Universidad Lisandro Alvarado. Barquisimeto. Venezuela.

Artigue, M. (2003). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Becerra, R. y Moya, A. (2008). Una perspectiva crítica de la evaluación matemática en la educación superior. Sapiens. Revista Universitaria de investigación. Año 9. Nº 1, 35-69.

Brito, R. y Amado, M. (2001). Causas de la repitencia en matemáticas en el Instituto Tecnológico de Mexicali. [Documento en línea] Disponible: http://www.alammi.info/revista/numero2/cau_0001.pdf [Consulta: 2010, Febrero 20].

Capace, L. (2008). La integral en una variable real en la formación técnica universitaria: dimensiones presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

Carlos, E. (2000). La superación del profesor de matemática en la universidad de hoy. Una experiencia cubana. En R.M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 13 (pp. 485 – 492). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Deiros B. y Calderón, M. (2001). La matemática para ingeniería: algunas propuestas metodológicas. Ponencia presentada al Primer Congreso Iberoamericano de Docentes de Ingeniería y afines. Ciudad de La Habana.

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (1998). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: Mc Graw Hill.

Diez, T. (2008). Un sistema de evaluación del aprendizaje para la matemática superior en perfiles ingenieros. Tesis doctoral. La Habana: Editorial Universitaria.

Dujet, C. (2007). Mathématiques pour I'ingénieur et Sciencies Humaines [Documento en línea] M2Real Publicaciones. Disponible: http://www.m2real.org [Consulta: 2010, Febrero 20].

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y universitaria. Tesis doctoral. Universidad de Vigo, España.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M. y Sales, J. y Segura, R. (2004). Matemática en secundaria y universidad: Razones y sin razones de un desencuentro. Comunicación invitada en las X Jornadas sobre Educación Matemática. Santiago de Compostela.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1), 39-88

Lara, H. (1997). La enseñanza del los conceptos de límite y continuidad de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática (pp. 127 – 132). Sonora.

Mora, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática. Revista de Pedagogía, 24(70), 181-272.

Posso, A., Gómez, J. y Uzurriaga, V. (2007). Dificultades que aparecen en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática al pasar de Bachillerato a la Universidad. Scientia Et Techica, 13(34), 495 – 499.

Preocupa Elevado Índice de Aplazados. (2009, 30 Noviembre). Tiempo Universitario. Universidad de Carabobo, p.22.

Rivaud, J. (2004). La Enseñanza de la Matemática en las Escuelas de Ingeniería. Acta Universitaria, mayo-agosto, 14(2), 5 – 7.

Luis Capace Pérez.

Profesor de Matemática, con maestría en Enseñanza de la Matemática y doctorado en Educación, por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Tesis doctoral en el área de la Educación Matemática. Es Profesor Titular Jubilado de la Universidad Politécnica Territorial del Estado Aragua "Federico Brito Figueroa". Tiene veintitrés años dedicados a la enseñanza del cálculo en las carreras técnicas universitarias. Investigador en el área de la enseñanza del cálculo en ingeniería y carreras técnicas universitarias. Actualmente se desempeña como profesor contratado en la Universidad Nacional Experimental Politécnica de la Fuerza Armada (UNEFA- Maracay) y en el Doctorado de Educación Matemática de la UPEL-Maracay. Tiene varias publicaciones en revistas arbitradas y ha participado en eventos nacionales e internacionales.

La formación docente y el uso de las tecnologías para la enseñanza de la matemática en educación especial

Angélica María Martínez

La formación docente y el uso de las tecnologías para la enseñanza de la matemática en educación especial

Introducción

En la educación el logro de los aprendizajes está en concordancia con las capacidades de cada estudiante; por ello deben tenerse en consideración los diversos aspectos que fomentan sus potencialidades, entre ellos el buen uso de recursos y materiales didácticos, la planificación de contenidos, la preparación del docente, la infraestructura institucional y otros más.

Precisamente dos aspectos como la formación docente y el buen uso de recursos son temas de gran interés para quienes estamos inmersos en el campo de la Educación Matemática, tanto desde lo educativo como en lo investigativo, y en específico, vale señalar que existe gran inquietud en cuanto a la formación matemática de quien será docente en Educación Especial, en cuyo caso, para quien escribe este capítulo, es su asunto de interés indagatorio.

Es así como a través de este escrito se pretenden puntualizar algunos aspectos relevantes sobre la formación docente y la aplicación de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la práctica educativa de quienes enseñan Matemática en el contexto de la Educación Especial.

La información se presenta con la descripción e interpretación crítica de algunas ideas, sustentadas por las lecturas realizadas a varios documentos, entre ellos tesis doctorales, artículos compilados en revistas publicadas en internet, en Handbooks y otros; a través de los cuales se llegó a delimitar el tema en varios apartados: La formación docente ante el uso de las TIC, Las TIC en investigaciones de Educación Matemática, Aplicación de las TIC para la enseñanza de la Matemática en Educación Especial, Reflexiones retrospectivas y Referencias.

La formación docente ante el uso de las TIC

Para los docentes su formación profesional no culmina al graduarse, por el contrario, es relevante seguir capacitándose dados los cambios que van gestándose ya sea por legislación o por el progreso social, pues aún con la preparación recibida en pregrado no es suficiente para abordar la realidad que enfrentan en las aulas de clases, debiendo lidiar con situaciones de índole cultural, social, afectiva, psicológica, cognitiva, interdisciplinaria, y hasta de orden personal donde intervienen los diversos intereses de quienes conforman la comunidad educativa (directivos, colegas, representantes, entre otros).

En este sentido, Teixeira (2011) afirma que la mayoría de las veces los docentes carecen de conocimientos y estrategias para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus alumnos, lo cual ella misma evidenció al dar clase tanto a docentes en servicio como a docentes en formación quienes le manifestaban, entre otros aspectos, la necesidad de aprender más sobre el uso de la tecnología, por lo cual se dedicó a realizar un trabajo doctoral para llevar a cabo una práctica donde los docentes interactuaran entre sí a través del uso de plataformas en internet, de tal modo que compartían experiencias, realizaban actividades matemáticas, buscaban soluciones a problemas, intercambiaban ideas, entre otras muchas cosas. Pero quizá otro aspecto importante que se da en su tesis, es cuando menciona las características de un docente competente que van relacionadas con rescatar el conocimiento del docente desde su propia práctica.

Por una parte, para ser docente competente se requiere: ser un profesional reflexivo, investigador de su propia labor, que pueda equilibrar la teoría con la práctica, y seguirse formando; mientras que por otra parte, existe un valor agregado en el conocimiento que el educador va adquiriendo en su praxis, siendo importante el mutuo acompañamiento con otros pares a fin de reflexionar sobre cómo hace cada quien su trabajo e investigar al respecto.

Tanto la reflexión como la investigación van en busca de esos conocimientos profesionales del docente, autores como Maurice Tardif, Stephen Kemmis, Paulo Freire, Dario Fiorentini y Lee Schulman (entre otros) son partidarios de estas ideas.

En el caso de Geraldi, Fiorentini y Pereira, desde 1998 han indagando sobre la labor docente, y considerando algunas de sus afirmaciones, se puede decir que gracias a la reflexión los docentes pueden encontrar el sentido amplio de quienes son, fortificando el concepto desde una visión personal, en la que se habla de “nosotros mismos”, de nuestras ideas y creencias adquiridas en la vida; y más allá de esto, de nuestras propias prácticas en el salón de clase, aún de nuestro mundo, referido al entorno social, a las políticas educativas y al contorno institucional que puede ir más allá de las cuatro paredes de un aula. Pero esta reflexión puede ser enriquecida con la interrelación entre colegas, con los debates teóricos y con los resultados dados en investigaciones; es decir, por ella sola no siempre puede llegarse a conclusiones determinantes; y es así como la investigación, puede igualmente servir para ese proceso de reflexión del docente pues busca la comprensión profunda sobre aspectos puntuales, previamente vistos como situaciones problema que atañen al docente o le causan inquietud, ya que estima respuestas eficaces, más detalladas, más minuciosas.

Más aún, si los procesos de investigación pueden influir en la manera de pensar del docente, es preciso que dicho docente esté abierto a la reflexión porque es a través de esta actitud como se propicia la aceptación a los cambios, a las innovaciones, con lo cual el docente podrá plantearse otras alternativas en su labor, superando sentimientos aprensivos a la hora de tomar nuevas rutas o modos de llevar su clase.

En correlación a esto, se puede equiparar lo que sucede cuando se le plantea al docente usar la tecnología. Grugeon, Lagrange y Jarvis (2010) dicen que: "La integración de un nuevo artefacto en una situación de enseñanza altera necesariamente la estabilidad existente y requiere que los maestros se sometan a un complejo proceso de adaptación" (p. 329). Para algunos docentes es un reto manejar la tecnología pues no están capacitados para ello y otros en cambio tienen prejuicios a la hora de usarla tanto ellos como sus educandos, como afirma Rojano (2003): "los maestros con poca experiencia en el uso de las TIC, tienen gran dificultad en apreciar su poder como herramientas de aprendizaje" (p. 136).

Sarmiento (2004), también confirma esta situación; para esta investigadora aprender con la mediación de las tecnologías es un reto dentro de las actividades diseñadas por el docente, tanto porque implica para ellos variar sus enseñanzas o volverse expertos en su utilización como hacerse a la idea de una nueva manera de comunicarse con sus estudiantes.

Así, retomando la idea inicial, un docente más reflexivo, que posea una actitud positiva ante el cambio, que esté dispuesto a asumir nuevos roles, tendrá más opciones para acceder al uso de la tecnología y verá con mejores ojos las propuestas que emerjan de las investigaciones; no obstante, esto debe venir acompañado de procesos donde se le propicien o se le de apoyo a su formación profesional con una visión hacia el uso de la tecnología.

La UNESCO en el 2008 ya advertía la necesidad de incorporar el uso de diversas herramientas de tipo tecnológico en la práctica pedagógica, haciendo mención de que el profesor debería tener conocimientos sobre dónde y cuándo usarlas. En este orden de ideas, Teixeira (2011) afirma: "es relevante que los profesores sean preparados para estas nuevas prácticas, después de todo, desempeñan un papel destacado sobre la integración escolar en la cultura digital". Aunado a esto, Sarmiento (2004) dice que: "se hace necesaria una formación permanente, basada en gran medida en el auto-aprendizaje y que sea accesible en todo momento y lugar" (p. 210).

De esto último se llega a otro factor, el hecho de que las tecnologías están siempre renovándose y por ende hasta se habla del uso de nuevas tecnologías en el campo educativo, por lo cual, nuevamente se advierte la necesidad de continuar con una formación continuada del docente en este campo. Pero por mucho que la tecnología avance el papel del docente siempre será importante, no se trata de ver la tecnología como una panacea, con la cual se pueden solucionar todos los problemas de aprendizaje, al contrario, se le debe ver como una herramienta al servicio del docente; en concordancia se tomará lo expresado por Sarmiento (2004): "La relación entre nuevas tecnologías y formación la entendemos desde la perspectiva de su utilización como herramientas al servicio de la formación y el perfeccionamiento del profesorado" (p. 213).

Es quizá muy conocido el temor de algunos docentes de verse relegados en su función docente por el uso de las tecnologías, o se tienen los casos donde el docente las usa pero de un modo técnico, con lo cual tampoco se estaría solucionando nada en cuanto al aprendizaje, es decir, la tecnología pasaría a ser un artefacto para responder a ciertas preguntas donde no se involucran procesos de aprendizaje.

Ante estas dos situaciones, vale aclarar por una parte que la actividad del estudiante, a través del uso de herramientas tecnológicas, no supone la inactividad del profesor, por el contrario el integrar las TIC en el aula "es función de los profesores, pero antes de introducirlas, es necesario plantearse el modo de hacerlo eficazmente,… De ello dependerá la selección y diseño de las tareas que se trabajarán en el aula con estos recursos"; los cuales serán de mayor provecho cuando el profesor cumple la función de "proporcionar el material adecuado y estimular a los estudiantes para que, mediante la observación, la comparación, el análisis de semejanzas y diferencias, etc., lleguen a descubrir de un modo activo los contenidos seleccionados" (García, 2011, p. 56).

Globalmente, se podría hablar de un cierto acuerdo sobre la formación docente en torno a las TIC; por una parte es necesaria la preparación de los educadores en el manejo de las nuevas tendencias tecnológicas, no para verlas como una simple herramienta, sino por el gran valor que pueden proporcionar para su labor docente al constituirse en una ayuda para el aprendizaje del estudiante; y por otra parte, para alcanzar esta meta, será necesario formar un docente reflexivo, abierto a las innovaciones, a la investigación, a la interacción con sus pares.

A modo de síntesis, todo lo anterior se complementa con la idea planteada por Nava (2010):

> Si se considera que parte de la solución puede estar en programas para la superación permanente de los profesores, las tecnologías y las herramientas mediadoras pueden jugar un papel de primer orden siempre que se conozca hasta donde pueden ser útiles y precisar en qué pueden ayudar (p. 17)

Las TIC en investigaciones de educación matemática

En el aspecto de la Educación Matemática, recientemente las TIC han jugado un papel muy importante al momento de abordarlas como mediadoras del aprendizaje y aún como parte esencial en la formación docente del profesor de Matemática.

En un contexto general de la enseñanza de la Matemática, el uso de herramientas tecnológicas queda supeditado a verlas como soporte de apoyo en las clases de matemática y suelen tener muy buena aceptación por parte de los educandos, que en la mayoría de los casos ya está familiarizado con ellas. Por su parte, como dirían Rojano (2003) y García (2011), los reportes investigativos revelan que los estudiantes aprenden más significativamente la Matemática, mejoran globalmente su actitud y competencias matemáticas cuando la practican a través del uso adecuado de las TIC; y a su vez, Teixeira (2011) menciona que nos encontramos en "la era de la información", de una "Sociedad de la Información y la Comunicación", que clama por cambios innovadores en el sistema educativo; situación favorecedora al momento de incorporar las TIC en la escolaridad.

En tanto, en el contexto de la investigación en Educación Matemática, las TIC son empleadas en diversas formas, de acuerdo con Grugeon, Lagrange y Jarvis (2010), se distinguen tres diferentes tipos de uso:

> 1. Creación y uso de cintas de vídeo, discos de video y los recursos multimedia con el fin de hacer una amplia gama de interacciones pedagógicas disponibles para el análisis.

2. Uso de los paquetes de Internet y software de comunicación para permitir y facilitar la información y la comunicación en el desarrollo profesional.

3. El uso de las computadoras, calculadoras y otros recursos electrónicos para hacer matemáticas.

En lo referente al diseño de instrumentos y herramientas tecnológicas, se han dado grandes avances, ampliado sus funciones y siendo más versátiles al momento de manejar, tal es el caso de las simulaciones, producción de videos, desarrollo de applets, entre otros. Para la enseñanza de la Matemática esto ha tenido repercusión; según Nava (2010), los primeros programas o software con funciones interactivas creadas específicamente para el aprendizaje de la Matemática, se realizaron bajo el entorno LOGO. Para el año 1997 se comienza a trabajar con micromundos, empleando Papert, y por este mismo año se da un gran salto cualitativo al emplear programas GCP para la graficación de funciones, lo cual más adelante será mejorado con el uso de los Software de Geometría Dinámica (SGD).

Teixeira (2011) también señala la variedad de programas educativos dirigidos a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, entre ellos nombra a: Graphmatica, Poly, Calques 3D, Winplot, Regla y Compás, Geogebra, e incorpora al Cabri Géomètre. También habla de las implicaciones con internet, pues a través de este medio se pueden crear espacios virtuales que permiten la comunicación e interacción matemática con otros estudiantes tanto de manera presencial como no presencial, aplicando entre otros: el chat, los videos, Websites, fórum, repositorios, blogs, y muchos más. Un ejemplo de este caso, se observa en el trabajo de Sarmiento (2004), quien aplica Clic 3.0, el cual es un entorno para crear y ejecutar actividades educativas multimedia.

Para contenidos algebraicos se trabaja con Sistemas de Algebra Computacional (CAS), también se tienen hojas de cálculo y software de matemática dinámica (SMD); mientras que para la geometría (una de las áreas más tratadas en investigación en Educación Matemática) se suele emplear el Geogebra, el cual pertenece a los llamados SGD, el cual "desde sus inicios, hace más de dos décadas, ha ido ganando relevancia hasta convertirse en uno de los software más ampliamente usados en las escuelas y colegios de todo el mundo" (García, 2011, p. 46).

Se puede notar en consideración a las investigaciones descritas, que las TIC son un medio para canalizar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, pero vale advertir nuevamente que por ellas mismas no queda garantizada una buena enseñanza y mucho menos un buen aprendizaje.

Ya Figueras (2011) lo advierte, es ingenuo creer que se logra un aprendizaje de la Matemática cuando se usan las TIC sólo como herramienta; es decir, cuando “las competencias a desarrollar pueden estar vinculadas con conocer a fondo las características del mecanismo de los artefactos electrónicos, con aprender a usar paquetes electrónicos específicos, o bien con programar usando uno o varios lenguajes” (p. 73).

Por esto último, pese a la receptividad dada al uso de la TIC en investigaciones dentro de la Educación Matemática, se debe tener cuidado en el manejo de las mismas y de sus implicaciones en procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Aplicación de las TIC para la enseñanza de la matemática en educación especial

En forma general, las aplicaciones del uso de las TIC en Educación Matemática se tienden a mostrar en investigaciones donde los estudiantes son considerados “regulares”, es decir, que no presentan alguna condición física, motora o cognitiva; sin embargo, paulatinamente se evidencia otra perspectiva, encaminada a la atención pedagógica que deben recibir estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE) con o sin discapacidad con el apoyo de software y otras herramientas tecnológicas, aunque aún con esto no siempre se cuenta con la formación apropiada para atenderlos en lo referente a la apropiación de contenidos matemáticos.

Algunos autores como Bruno y Noda (2010), mencionan que:

> existe una falta de estudios sobre cómo tratar la formación de los profesores que trabajan con los alumnos con NEE en matemáticas. Es una realidad que muchas veces los profesores que atienden a los alumnos especiales tienen una fuerte formación en aspectos psicológicos y pedagógicos, pero no han recibido formación en contenidos didácticos de áreas curriculares, lo que les lleva a tener inseguridades en el tratamiento de los diferentes contenidos (pp. 146-147).

Quizá por esto último, se está dando una tendencia a buscar a través de la tecnología una posibilidad de dar contenidos matemáticos de manera diferente y cónsona con las necesidades propias de los educandos con diversas condiciones.

No obstante, como docentes tenemos que saber hasta dónde llega la utilidad de los soportes tecnológicos en procesos de aprendizaje para educandos con NEE o con discapacidad, pues pueden servir a unos para superar dificultades de percepción sensorio-motora, o en otros, para dificultades de orden cognitivo.

En el primer caso, los estudiantes presentan dificultades para extraer información por algún canal sensorial y el uso de soportes tecnológicos facilitan la percepción de contenidos; para este caso se tienen entonces, componentes adaptados del ordenador o de otros medios electrónicos según las necesidades del educando, como sucede por ejemplo con aquellos que presenten deficiencias auditivas, quienes a través de implantes auditivos o a través del uso de audífonos modernos pueden llegar a tener mejor acceso a la información; o en el caso de personas con discapacidad motora que podrían usar ratones de boca, los cuales se mueven gracias al soplar o aspirar aire a través de la boca; o en el caso de personas ciegas, quienes para acceder a contenidos escritos usan programas como el JAWS o el ORCA que los convierten a formatos audibles; vale aclarar que en general al uso de la tecnología adaptada a personas ciegas o con deficiencias visuales se le conoce como *Tiflotecnología*, y acorde con Pegalajar (2013), constituye "un conjunto de técnicas, conocimientos y recursos encaminados a procurar a los ciegos y deficientes visuales los medios oportunos para la correcta utilización de la tecnología, con el fin de favorecer su autonomía personal y plena integración social, laboral y educativa" (p. 15).

En tanto, para el segundo caso, los educandos poseen dificultades para dotar de significado o para procesar un contenido pese a que pueden percibirlo a través de sus órganos receptores, siendo en este caso la tecnología un medio para contrarrestar su percepción cognitiva, atención y memoria. Ejemplo de trabajos enfocados en este sentido corresponden con el planteado por Ortega (2008), quien habla de la superación de alteraciones cognitivas, características en personas con Síndrome de Down (SD) a través del uso adecuado de la tecnología, asegurando además "que la dificultad ante las matemáticas, que presentan las personas con SD, no es una dificultad inherente a sus características e imposible de solventar, sino una característica modificable y solucionable mediante el uso de las ayudas pertinentes" (p. 90), en este caso referidas al uso de ordenadores, donde "el ordenador puede crear un espacio útil, interactivo y multisensorial que facilita a la persona con Síndrome de Down un entorno comprensible y flexible en el que puede desarrollar al máximo sus potenciales" (p. 91); pero indica además, que si bien la tecnología es un puente metodológico para la enseñanza de la Matemática a las personas con SD, uno de sus principales aportes radica en el uso de material mutimedia por su versatilidad y flexibilidad, con el cual se pueden diseñar programas educativos acordes con las necesidades individuales de estos estudiantes.

En otro caso similar, Bruno y Noda (2010) describen la importancia de trabajar con las TIC para la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en niños con síndrome de Down; mencionan que "El ordenador, al presentar la información a través de mensajes visuales y auditivos, permite a este alumnado captar la información, incrementa la motivación y la atención hacia la tarea" (p. 152).

Otros investigadores también hablan sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática dentro del contexto de Educación Especial. Adam y Tatnall (2010) ponen a disposición el uso de las TIC para el aprendizaje de las fracciones en estudiantes con dificultad de aprendizaje, llegando a concluir que el uso de medios tecnológicos puede tener un impacto beneficioso, tanto para la mejora de aprendizajes como para la autoestima de estos educandos.

Para educandos con trastornos del espectro autista (TEA), caracterizados por tener dificultades de interacción social y presentar comportamientos estereotipados, la implementación de actividades educativas desarrolladas en entornos digitales e informáticos promueve sus procesos de aprendizaje; así mismo lo aseveran Lozano, Ballesta y Alcaraz (2011), la tecnología "se configura como un medio de ayuda para estas personas que compensa limitaciones funcionales, y aumenta e intensifica aprendizajes, independencia y autonomía, movilidad, comunicación y control del entorno" (p. 141); esto en gran medida se da porque los educandos con TEA suelen apropiarse efectivamente de tareas elaboradas con las TIC, pues entran en concordancia con sus condiciones "debido a que proporcionan un entorno controlado, atención individualizada y la posibilidad de repetición de las actividades propuestas" (p. 141).

En paralelo, algunos autores han abordado la enseñanza de la Matemática en personas con TEA, tal es el caso de Malavé y Manzanilla (2014) quienes proponen incentivar la noción de números a niños y niñas con Asperger aplicando las nociones teóricas de Piaget y de la psicopedagoga María Paluszny, confirmando en su investigación que es necesario "utilizar el vocabulario matemático correctamente a la hora de enseñar la noción del número ya que los niños autistas con síndrome de asperger cumplen con una condición particular que ellos no comprenden metáforas" (p. 82), situación que implica una preparación pedagógica enfocada en: instrucciones, reforzadores, moldeamiento, motivación y ejecución del tiempo por parte del docente que atiende a estos educandos.

Ahora, poco se ha realizado en lo concerniente a investigaciones donde se involucre la enseñanza de la Matemática a través de las TIC dirigido a educandos con Autismo, entre uno de los trabajos relacionados se tiene el elaborado por Hernández (2012), el cual tuvo como finalidad contribuir en el incremento de la motivación en los participantes, hacia la obtención de los conocimientos de operaciones básicas, entre otros, a partir de un material educativo computarizado, donde se tomaba en cuenta el ritmo individual del educando para mejorar su rendimiento y facilitaba también la labor del instructor al momento de impartir sus clases. Este material fue elaborado por el mismo autor, quien por presentar la condición de autismo, vislumbró en esta propuesta una posibilidad de acercar la Matemática a niños y niñas que tuvieran este trastorno.

Para casos con educandos sordos o con discapacidad auditiva, se han encontrado diversas investigaciones donde las TIC juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. En el trabajo de Córdova, Gómez y Zúñiga (2013), se plantea la integración de las TIC a las prácticas de enseñanza de los docentes como medio facilitador del desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes sordos; donde se asegura que a través de la manipulación directa de medios computacionales se favorece el desarrollo cognitivo matemático a través de actividades visuales porque

> …para que los estudiantes sordos accedan a la construcción de conceptos matemáticos generalmente intangibles se requiere que éstos sean comprendidos desde su realidad comunicativa y que la seña –en ocasiones inexistente en esta área de conocimiento-, unida a una fluida manipulación de objetos virtuales, potencia en gran medida la posibilidad de adquisición de los aprendizajes convenidos en los planes de periodo del área de Matemáticas (p. 13)

Pero para alcanzar el logro de su propuesta debieron sortear una serie de inconvenientes, entre ellas: la limitación en la integración pedagógica de las TIC, carencia de capacitación en el uso de las mismas, el excesivo empleo del español escrito, poco conocimiento de la lengua de señas, y además, aunque el pensamiento variacional constituye un componente en el área de Matemática, con preocupación advierten que "los docentes no tienen mucha claridad sobre la didáctica para abordarlo y aún más en la población sorda, razón por la cual optan por no incluirlo en sus planes de periodo y, por ende, en sus prácticas docentes" (p. 96). Esto mismo llevó a considerar que su propuesta de sistematizar una capacitación de los docentes en la integración de las TIC a sus prácticas de enseñanza, es hoy en día muy necesaria porque permite "responder a las necesidades de la población sorda y didactizar los contenidos académicos de tipo abstracto para que puedan ser comprendidos por los estudiantes con limitación auditiva" (p. 98).

Análogamente, Aldana y González (2012) a través de su trabajo de investigación diseñan un blog educativo para la enseñanza de la Geometría a estudiantes con deficiencia auditiva cursantes de segundo año, porque como ellas mismas comentan "los docentes deben ser conscientes de que éstos estudiantes requieren métodos visuales como principal medio para aprender" (p. 14), así que proponen, como apoyo didáctico tanto para el docente como para el educando, un blog cuyo tema gira en torno a la geometría, primero describiendo sus orígenes, luego definiendo algunos conceptos básicos y finalmente detallando temas de simetría y congruencia de figuras geométricas, donde acompañan algunos títulos con alfabeto manual venezolano. Realmente lo interesante de este trabajo radica en la posibilidad de sensibilizar al docente en la búsqueda de otras alternativas didácticas para educandos con deficiencias auditivas, a fin de promover el aprendizaje de contenidos específicos de geometría, área de la Matemática que muchas veces no es dada completamente en los años escolares.

En este sentido, otro aporte encontrado es el software "Matemática en Señas" desarrollado en 2009 por Ignacio Salazar y otros jóvenes venezolanos: Fauzi Gómez, Deborah Simon y Aída Torres, quienes han conformado un grupo de trabajo denominado "Vida en Señas". Dicho software fue diseñado para ayudar a niños sordos en temas de orientación espacial y de relaciones numéricas, pero también busca integrarlo al uso de las TIC y a la lengua de señas.

Sin embargo, es pertinente reconocer que algunos educandos con discapacidad o aún con NEE, pueden llegar a manejar las TIC en forma similar a quienes no tienen discapacidad, pero para otros las TIC podrían convertirse en un problema; de hecho, algunos programas educativos no son accesibles para estas personas debido, entre muchos otros aspectos, a las características técnicas con las cuales se presenta la información, siendo necesario implementar una evaluación de éstas considerando los tres pasos sugeridos por Pegalajar (2013), a saber:

> a) Evaluación de la accesibilidad y de la competencia digital, o evaluación del grado de interacción con las TIC que posee y puede alcanzar dicho alumno. Dada su complejidad, dicha evaluación debe ser Multiprofesional, de tal modo que puedan participar profesionales de los equipos especializados, equipos de orientación educativa, profesorado y personal educativo que atiende al alumno, profesionales que conozcan las características y posibilidades de las TIC, la familia y el propio alumno.
>
> b) Proceso de reflexión y toma de decisiones sobre la idoneidad de las tecnologías de apoyo a la diversidad que, en su caso, se hiciera necesaria. Ello incluye software más adecuado a las competencias del alumno, ayudas técnicas necesarias, actividades multimedia más adecuadas, niveles de interactividad, sistema de evaluación de los progresos, webs adecuadas y accesibles al nivel de competencia del alumno…
>
> c) Implementación de la tecnología de apoyo a la diversidad, adaptación del alumno y validación… (pp. 14 y 15).

Y es que en definitiva, con el propósito de incorporar al aula el uso de las TIC se ha venido propiciando la investigación en este campo, mostrando hasta el momento por una parte que pueden ser muy útiles y por otra que aún falta mucho por mejorar, lo cual compromete a muchos actores del ámbito educativo: directivas, estudiantes, orientadores, especialistas en informática, núcleo familiar,… pero entre ellos el docente tiene un gran compromiso; como afirma Lozano, Ballesta y Alcaraz (2011): "los beneficios de la tecnología no residen en la introducción de un nuevo soporte en el abultado y compartimentalizado currículum escolar, sino en transformar el sentido de la actuación docente" (p. 140), situación que no se escapa de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática mediados por las TIC en el contexto de la Educación Especial.

Reflexiones retrospectivas

Al comienzo de este artículo se da a entender la necesidad de implementar las TIC en la praxis pedagógica y poco a poco se llega a su adecuación en la enseñanza de la Matemática a educandos con NEE con o sin discapacidad, planteamiento que muestra en forma general algunos aportes en este tema, pero que no está delimitado ni por un nivel educativo en particular, ni un contenido matemático específico, ni mucho menos por una edad cronológica del educando; más bien, se trató de ver en forma global aquellos aportes que desde la investigación, las propuestas o experiencias, han dejado quienes trabajan cercanamente con esta temática a fin de seguir avanzando al respecto; y permiten como cierre, extraer algunas ideas reflexivas, entre ellas:

a) Es indudable cómo la utilización de materiales tecnológicos permite concretar contenidos matemáticos que por lo general no son tangibles, volviéndolos ostensibles mediante elementos diversos, donde el movimiento, la representación gráfica o auditiva, permiten ejemplificarlos de diferente manera; y es quizás a través de esta versatilidad que puede garantizarse cierta apropiación cognitiva para aquellos educandos con diversas condiciones ya sea físico motoras como intelectuales.

b) Desde la perspectiva educativa, un docente debería formarse en prácticas pedagógicas coherentes con aquellas que va a vivenciar, más aún en lo referente al uso de las TIC, tanto porque será más factible la aceptación de innovar educativamente a través de herramientas tecnológicas como por el hecho de que en la actualidad los educandos de esta nueva era, considerados usuarios innatos de dichas tecnologías, están más abiertos a usarlas en una clase de Matemática.

c) Aunque en el docente recae mucha responsabilidad en el uso de herramientas tecnológicas, no por esto queda exenta la participación activa de otros miembros de la comunidad educativa; precisamente a través del trabajo colaborativo de todas las partes involucradas se podrá garantizar un manejo más óptimo acorde con las necesidades propias del educando.

d) Por último, con respecto al impacto del uso de las TIC para la enseñanza de la Matemática en el contexto de Educación Especial, se debe seguir ahondando sobre investigaciones que aborden esta problemática, pues aún falta mucho por delimitar, por definir, por argumentar válidamente, por construir didácticamente en pro de educandos con diversas condiciones; como en el caso de educandos con TEA o sordociegos.

Referencias

Adam, T. y Tatnall, A. (2008). Using ICT to Improve the Education of Students with Learning Disabilities. En Michael Kendall y Brian Samways (Eds.), Learning to Live in the Knowledge Society (pp. pp. 63–70). Boston: Springer.

Aldana, M. y González, Y. (2012). Blog educativo para la enseñanza de la geometría, a estudiantes con deficiencia auditiva del Liceo Bolivariano “Antonio José Pacheco” del Municipio Valera, estado Trujillo. Trabajo de grado para optar al título de Licenciadas en Educación Mención Física y Matemática. Universidad de Los Andes, Trujillo.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con Síndrome de Down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 141-162). Lleida: SEIEM.

Córdova, C.A., Gómez, V. y Zúñiga, L.A. (2013). Propuesta para la integración de TIC a las prácticas de enseñanza de los docentes de la Institución Educativa Francisco Luis Hernández que favorezca el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes sordos en el área de matemáticas. Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación. Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín.

Figueras, O. (2011). Atrapados en la explosión del uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación. PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática [Revista en línea], 5(2), 67-82. Disponible en:

http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Figueras2011PNA5(2)Atrapados.pdf [Consulta: 2015, Marzo 9]

García, M. (2011). Evolución de Actitudes y Competencias Matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula. Tesis Doctoral. Universidad de Almería, España.

Geraldi, C. G., Fiorentini, D. y Pereira, E. M. (1998). Cartografias do trabalho docente: Professor(a) Pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras & ALB.

Grugeon, B., Lagrange, J.B. y Jarvis, D. (2010). Teacher education courses in mathematics and technology: Analyzing views and options. En C. Hoyles & J.B. Lagrange (Eds.), Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI study. (Vol. 13, New ICMI Study Series, pp. 329-345).NY: Springer.

Hernández, H. (2012). Material Educativo Computarizado como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática, dirigido a los alumnos de tercer grado de Educación Básica de la Unidad Educativa

Privada Roraima, ubicada en Maracay, estado Aragua. Trabajo de grado para optar al título de Técnico Superior Universitario Mención Informática. Instituto Universitario de Tecnología de Administración Industrial (IUTA), Aragua.

Lozano, J.; Ballesta, J. y Alcaraz, S. (2011). Software para enseñar emociones al alumnado con trastorno del espectro autista. Comunicar [Revista en línea], 36(18), 139-148. Disponible: http://www.revistacomunicar.com/index.php?contenido=detalles&numero=36&articulo=36-2011-17 [Consulta: 2015, Marzo 9]

Malavé, I. y Manzanilla, H. (2014). Descripción del proceso de enseñanza acerca de la noción de número a niños y niñas autistas con síndrome de asperger de la Fundación Carabobeña de Niños Autistas. Trabajo Especial de Grado para optar al título de Licenciado en Educación Mención Matemática. Universidad de Carabobo, Valencia.

Nava, A. (2010). Los procesos interactivos como medio de formación de profesores de matemáticas en un ambiente virtual. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Disponible: http://www.tdx.cat/handle/10803/4728

Ortega, J. M. (2008). Síndrome de Down: contenidos matemáticos mediados por ordenador. UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática [Revista en línea], 16, 85-105. Disponible:

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_010.pdf [Consulta: 2015, Marzo 9]

Pegalajar, M. C. (2013). Tiflotecnología e Inclusión Educativa: Evaluación de sus posibilidades didácticas para el alumnado con discapacidad visual. Revista Electrónica de Investigación y Docencia (REID) [Revista en línea], 9, 8-22. Disponible:

http://www.revistareid.net/revista/n9/REID9art1.pdf [Consulta: 2015, Marzo 9]

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias. Revista Iberoamericana de Educación, 33, 135-165.

Sarmiento, M. (2004). La Enseñanza de las Matemáticas y las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación. Una estrategia de formación permanente. Tesis Doctoral. Universitat Rovira I Virgili, Tarragona, España.

Teixeira B., G. (2011). Tecnologías na práctica docente de profesores de matemática: formaçao continuada comapoio de uma rede social na internet. [Versión completa en línea] Tesis doctoral. Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Disponible: http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/59/browse?value=Peixoto%2C+Gilmara+Teixeira+Barcelos&type=author

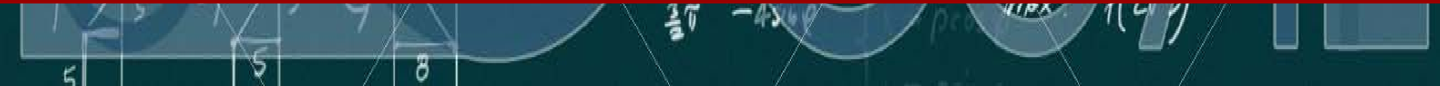
UNESCO. (2008). Estándares de competencia en TIC para docentes. [Documento en línea]. Disponible: http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf. [Consulta: 2015, Marzo 9]

Angélica María Martínez.

Magister en Educación, mención Enseñanza de la Matemática por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Licenciada en Matemática y Física, Profesora de Matemática y actualmente cursante del Doctorado en Educación Matemática (UPEL). Profesora adscrita al Departamento de Matemática en la UPEL-Maracay, en la categoría de Asistente, con dedicación a tiempo completo. Miembro activo del Núcleo de Investigación en Educación Matemática, Dr. Emilio Medina (NIEM) de la UPEL-Maracay; y de la Junta Directiva Nacional de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). Ha participado en diversos eventos, actuando entre otras como: Coordinadora General del Primer Encuentro de Educación Matemática y Educación Especial; y como Ponente en congresos de índole nacional e internacional, entre ellos el COVEM, la RELME y el CIBEM.

Investigar en pensamiento matemático avanzado

Sabrina Garbin Dall´Alba



Investigar en pensamiento matemático avanzado

Introducción

Investigar en una determinada área, como en el llamado *Pensamiento Matemático Avanzado*, requiere situarse en el conjunto de la Educación Matemática.

Comenzamos el capítulo explicitando qué se entiende por Pensamiento Matemático Avanzado y sometiendo a discusión la existencia o no de una clara división entre el Pensamiento Matemático Elemental y el Avanzado, y qué diferencias les serían atribuibles.

Presentamos brevemente algunos modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Y damos a conocer algunos de los aspectos que toman en cuenta ciertas investigaciones en su línea de estudio, lo cual nos permite mostrar específicamente algunas de las aportaciones y prospectivas de investigaciones realizadas desde el interés de la Didáctica del Cálculo y Análisis.

Pensamiento matemático

Desde los años 80 hay interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en la forma de cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, es decir un interés por estudiar la psicología del pensamiento matemático. Los investigadores interpretan cómo entienden las personas un contenido específico matemático, caracterizan los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos. Freudenthal, Poincaré, Hadamard, han hecho estudios de tipo introspectivos al analizar su propia actividad personal como matemáticos o Polya a través de estudiar la producción de sus alumnos. De otra forma, también se reconoce el aporte de Piaget.

Existen algunas versiones sobre cómo se interpreta el desarrollo del pensamiento matemático. Puede entenderse como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; otra visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano en múltiples tareas y en un sentido moderno, que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis (Cantoral y otros, 2000).

En 1986 se reunieron Gontran Ervynck y David Tall para formar un grupo de estudio sobre Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) y trabajar en un libro (Tall, 1991) con el mismo nombre, consideraron las matemáticas de secundaria y las de universidad, tratando de conectarlas con la manera de pensar de los matemáticos. Es decir, desde este comienzo, estarían incluidos bajo el nombre del PMA los últimos años de la escuela secundaria hasta el pensamiento formal axiomático basado en definiciones y demostraciones. Años después, en otras publicaciones, se ha debatido el significado de la frase Pensamiento Matemático Avanzado. ¿Debería el término “avanzado” referirse a las Matemáticas o al pensamiento o a ambos? Sternberg (1996) escribió en el último capítulo de su libro sobre la naturaleza del pensamiento matemático, “no existe un acuerdo sobre que es el Pensamiento Matemático”. En este capítulo consideramos ambas perspectivas, como fue la intención de los fundadores del primer grupo de estudio (Harel, Selden, y Selden, 2006).

¿Existe una clara división entre el PME y el PMA?

Por etapa elemental se entiende normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas se puede ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando.

Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para algunos investigadores. Tall (1991) y Dreyfus (1990, 1991), han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado, y es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental (PME) se convierte en avanzado no se ha definido con precisión.

Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de cuestiones que involucran conceptos matemáticos propios de la etapa avanzada, son procesos como el de representación, translación y abstracción entre otros.

Otra distinción entre una etapa y otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios.

Al comparar el pensamiento avanzado con el elemental señalan:

- Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
- Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante.

Bajos ciertos modelos de enseñanza y con otras palabras, en el siguiente cuadro (Calvo, 2001) aparecen las diferencias que podrían presentarse:

Cuadro 1
Diferencias entre PME y PMA

	Etapa Elemental	**Etapa Avanzada**
Estructura de las unidades didácticas	- Son cortas, y en ellas no se presentan diferenciación entre la teoría y la práctica	- Se presenta mucha información, en poco tiempo y sin ser precedida por una familiarización previa con las nociones que involucra; - Los espacios dedicados a la teoría y a la práctica se presentan diferenciados y a menudo, distanciados en el tiempo y dirigidos por profesores diferentes, donde el profesor más calificado (en el área matemática) suele encargarse de la teoría.
Estrategias utilizadas en el aula	- Basada en la resolución de problemas, entre los que están ausentes los pedidos de justificaciones; - Presenta una tendencia hacia la rutina de tareas, que convive con un rechazo ideológico a lo no creativo; - El uso de definiciones se restringe a la descripción de objetos ya conocidos.	- En las clases teóricas se trabaja sobre la base de exposiciones magistrales centradas en la presentación de definiciones, teoremas y aplicaciones; - La demostración formal sustituye plenamente a la explicación discursiva como método de validación; - Las definiciones ya no describen objetos conocidos sino que lo construyen formalmente; - En las clases prácticas, los problemas para resolver pasan a un segundo plano y son sustituidos en gran número por problemas para demostrar; - No se fomenta la rutina de tareas pero se exige implícitamente.
Dispositivos didácticos	- Libros de texto, fichas de trabajo, u otros materiales impresos que el profesor sigue literalmente, muy procesados para que estén “a punto” para ser usados por el alumno y conteniendo toda la información requerida.	- Aunque se sugieren libros de texto, el profesor no lo suele seguir estrictamente; - El alumno produce su propio material, el cual a menudo debe completar con búsqueda autónomas de información.
Roles del profesor y los alumnos	- Profesor: es el responsable del aprendizaje del alumno. - Alumnos: alcanza con que “sigan la clase” y hagan lo que el profesor les indica en cada momento.	- Alumnos: son responsables de su aprendizaje, por lo que: deben ampliar el horario de estudio más allá de la permanencia en el aula, deben poder justificar todo lo que afirman (la intuición es ahora insuficiente), deben encontrar el equilibrio entre sus conocimientos prácticos y teóricos, deben ser capaces de comunicar adecuadamente esos conocimientos y deben ser capaces de evaluar la corrección, relevancia o elegancia de esa formulación. - Profesor: guía una parte del proceso de estudio.

Cuadro 1 (cont.)

	Etapa Elemental	Etapa Avanzada
Evaluación	- Sobre la base de exámenes o pruebas parciales complementadas con aportaciones más globales que incluyen valoraciones de la participación en clase o del desempeño en tareas domiciliarias; - En las pruebas se piden mayoritariamente reproducir lo hecho en clase, con escasa exigencia de justificaciones; - Los mecanismos de evaluación ocupan cada vez más espacio en el proceso de enseñanza tendiendo a integrarse en él.	- Sobre la base de exámenes, donde se suele pedir la resolución de problemas poco rutinarios y donde la teoría, que ocupa la mayor parte del tiempo de clase, no tiene una presencia equivalente; - Distanciada del proceso de enseñanza en tiempo y también en espíritu desde que considera a las clases prácticas y teóricas impartidas como simple ayudas de un proceso de estudio que el alumno debe realizar por sí solo, siendo este proceso de estudio lo que se pretende evaluar.

Al detenerse en los contenidos del Cuadro 1 y en lo anterior expuesto, se puede decir, que entre el PME y el PMA debe suceder una etapa de transición, que en un primer momento debe ayudar a traspasar el aprendizaje del profesor al alumno, incrementar en frecuencia y relevancia la demostración y la definición, y favorecer los cambios del alumno sobre la manera de realizar sus tareas de rutina y el cómo trata la información y realiza los procesos matemáticos (Garbin, 2005).

Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 15-20 años aproximadamente (Garbin, 2005), son los que están en esta etapa de transición.

- Las matemáticas de la escuela elemental se consideran como un estado preliminar, como el primer nivel, del PMA. Es una etapa y un momento intelectual en que los contenidos matemáticos no requieren de un formalismo previo. Se trata fundamentalmente de la etapa en la que el Álgebra, Geometría y Aritmética, como afirma Tall (1995), se tratan a nivel icónico, operacional y proceptual.

- Aquellas materias que requieren de una reconstrucción cognitiva, por las dificultades que conllevan, como la geometría euclidiana, el cálculo y el álgebra, serían propias de la etapa de transición del PME al PMA.

Esquema conceptual y definición del concepto

Diferencia entre esquema conceptual y definición del concepto

Aunque no se puede establecer una distinción clara entre PME y PMA sí se pueden señalar rasgos distintivos. Las investigaciones cognitivas específicamente están interesadas en los procesos (abstraer, representar, conceptualizar, etc.) relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos. Es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógica formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática.

A finales de los 70 y principio de los 80 mientras algunos psicólogos estaban tratando de repensar la naturaleza y el desarrollo de los conceptos, otros miembros del PME centraron su atención en cómo son definidos los conceptos matemáticos y cómo los alumnos están más familiarizados con dichos conceptos por el uso diario que tienen de ellos. Vinner y Hershkowitz (1980) refiriéndose a la geometría introducen la distinción entre definición del concepto (*concept definition*) y *esquema conceptual* (*concept image)* y Tall y Vinner[1] (1981) respecto a límites y continuidad. Siguiendo a Tall y Vinner (1981), la definición de un concepto es una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Las definiciones formales son convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (suelen encontrarse en los libros). Las definiciones personales son las que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción, de una definición formal.

El esquema conceptual: estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales (imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto: gráfica, numérica, simbólica,…), las propiedades y los procesos asociados al concepto. La parte del esquema conceptual que es activado en un tiempo particular, es llamada esquema conceptual evocado. Varias veces, aparentemente las imágenes contrarias pueden ser evocadas. Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente, tiene que haber un conflicto o una confusión, en un sentido real.

En la recopilación y estudio que hacen de las investigaciones que se han presentado en los distintos PME del 1976 al 2006, Harel, Selden y Selden (2006)

[1]Este artículo fue seleccionado para formar parte de una recopilación de 17 clásicos de la investigación en educación matemática (Carpenter, Dossey y Koehler, 2004).

afirman que se ha hecho común al investigar las concepciones de los estudiantes y enmarcar la discusión en término de la diferencia entre la definición del concepto y esquema conceptual.

Evolución de la noción de esquema conceptual, nueva caracterización y esquema conceptual epistemológico[2]

Hasta el día de hoy el constructo esquema conceptual ha ido matizándose y caracterizándose de diferente manera a través de investigaciones empíricas, a modo de ejemplo: esquema conceptual formal, esquema conceptual informal, esquema conceptual embodied, met-before del mundo embodied y el simbolismo, esquema conceptual independiente. En función de la efectividad se distinguen esquema conceptual eficiente y esquema conceptual degenerado (Tall, 2001, 2004, 2005; Pinto y Tall, 1999, 2001; Przenioslo, 2004, 2005; Chin y Tall, 2000, 2001; Chae y Tall, 2005; Watson, Spyrou y Tall, 2004; Watson y Tall, 2002; Garbin, 2005; Valdivé, 2008y Valdivé y Garbin, 2008, 2011).

En Valdivé y Garbin (2008, 2010) se explicita una parte de la evolución que ha tenido este constructo y la caracterización de la acepción cognitiva del esquema conceptual. Cuando Garbin y Valdivé (2008, 2010, 2013) hablan de esquema conceptual se refieren a: (1) Las ideas que asocia el sujeto al concepto; (2) Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, problema o tarea; (3) Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático; (5) El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) Los ejemplos y contraejemplos que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

Una distinción, luego de aceptar cierta proximidad entre el constructo esquema conceptual y de concepción, es la acepción epistemológica del esquema conceptual (Valdivé y Garbin 2008, 2010, 2013), puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y ejemplos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto específico.

---

[2] Al final del capítulo se habla de la línea de investigación desarrollada en la USB y en la UCLA que dio por resultado estas caracterizaciones. Si se quiere profundizar en la evolución de la noción de esquema conceptual y la proximidad con la concepción revisar Valdivé (2008).

Adquisición del concepto

Dialéctica proceso objeto; procepto

Una razón para la complejidad del conocimiento matemático, radica en que muchas nociones pueden tomar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación problema y de la concepción del estudiante (hacer de un proceso un objeto).

Los elementos de la actividad humana como son la percepción, el pensamiento y la acción permiten considerar la hipótesis de que la actividad matemática se desarrolla como percibiendo objetos, pensando acerca de ellos y ejecutando acciones sobre ellos.

Las matemáticas elementales comienzan con, *percepciones de*, y, *acciones sobre*, objetos en el mundo externo. Estos objetos, al ser percibidos son analizados y sus propiedades son examinadas, luego son descritos verbalmente y clasificados, desarrollándose posteriormente pruebas verbales sistémicas (Van Hiele, 1959). Por otro lado, las acciones sobre objetos, en el mundo matemático se conceptualizan como *conceptos*. Por ejemplo, en el proceso de contar se usan palabras para los números y para los símbolos, los cuales se conceptualizan como *conceptos* numéricos.

La distinción entre proceso y objeto ha sido investigada por Dubinsky (1991) que habla de encapsulaciones, entendidas como la conversión de un proceso en un objeto matemático, y se expande a la teoría APOS (Harel, Selden, Selden, 2006). Las siglas APOS significan las acciones, los procesos, los objetos, y los esquemas, éstas son las construcciones mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera (Dubinsky, 2000).

Por otro lado Gray y Tall (1994) introducen la noción de *procepto*, viendo al símbolo como un eje entre *proceso y concepto*. Algunos ejemplos de proceptos son:

$4 + 1$ proceso de adición, concepto suma

dy/dx proceso, concepto derivada

lim $1/x$ proceso tender al límite, concepto límite

$1 + ½ + ¼ + \ldots$, proceso de límite, concepto serie

Tall (1995) explica, que si el desarrollo comienza con objeto y acción, se podría decir que este desarrollo sigue con dos secuencias diferentes que ocurren simultáneamente. Una secuencia de desarrollo es la *visuo espacial,* la cual se convierte en verbal e induce a la prueba, y la otra secuencia de desarrollo usa símbolos conjuntamente con procesos y con conceptos, para hacer y pensar en lo que se hace; como por ejemplo hacer la multiplicación y pensar en el producto. Si bien estas secuencias de desarrollo pueden ocurrir independientemente (recordar que los griegos desarrollan una teoría geométrica sin ningún simbolismo para el álgebra y la aritmética) se han establecido muchas y útiles relaciones entre los métodos visuales y las manipulaciones simbólicas. Es ventajoso entonces tratar de desarrollar una aproximación versátil que tenga en cuenta las mejores ventajas de cada una de ellas.

La investigación en didáctica del cálculo y análisis matemático

El grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) conformado en los años 90, es dirigido por Ed Dubinsky y el propósito del análisis teórico que hacen es de proponer un modelo cognitivo, que consistiría en una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. El resultado del análisis se llama *descomposición genética del concepto* (APOE). Cabe destacar que el aporte de este grupo no se adscribe sólo en el área del cálculo sino abarca también el álgebra abstracta.

También, su acercamiento no es sólo cognitivo, y la naturaleza epistemológica no se reduce a la búsqueda de obstáculos epistemológicos. Se entiende como el estudio de las circunstancias que permite construir conocimiento, incluye aspectos sociales y culturales.

El ICME 7, realizado en Québec, en 1992, agrupó un número considerable de investigadores alrededor de la mesa de trabajo “Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo” y el interés ha sido el contestar a las siguientes preguntas:

- *Objetivos y contenidos*: ¿cuáles son los objetivos de un curso de cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de Matemáticas? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de los contenidos del curso?
- *Dificultades de enseñanza y aprendizaje*: ¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del cálculo? ¿Cuáles son las dificultades

específicas de algunos aspectos? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?
- *Concepciones del Cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias*: ¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿Cuáles han sido los resultados?

Se han ido señalando un conjunto de dificultades, algunas esenciales en el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en procesos básicos de derivada e integral. Así como en el estudio de las funciones, en la notación de Leibniz, el concepto de infinito, y el uso y selección de las distintas representaciones.

En este sentido, un proyecto de investigación nace en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (España) en el año de 1996 liderado por la profesora Azcárate y del cual participa Garbin (1998, 2000); Garbin y Azcárate (2000, 2001, 2002) y se amplía más tarde a la Universidad de Salamanca (Modesto Sierra), La Laguna (Matías Camacho), Valladolid (Tomás Ortega) y Lleida (Mar Moreno). El proyecto responde a una línea de investigación que tiene como propósito profundizar en: a) los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar; procesos todos ellos que tienen una componente psicológica; b) el estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis; c) el papel que juegan los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático[3].

En el marco de esta línea de investigación, se sigue desarrollando una línea en el Departamento de Matemáticas de la USB (Garbin, 2003, 2005,2007) y (Garbin y Mireles, 2009) y en la UCLA por Valdivé (2008) y Valdivé y Garbin (2008, 2010, 2013), en la etapa de transición del PME al PMA y en el Pensamiento Matemático Avanzado, específicamente en el curso de Análisis Matemático. El interés ha sido el estudio de conceptos en que están involucrados procesos infinitos, tales como límites, dimensión, fractales, series, y considerando al infinito *pequeño*, a los infinitesimales. Como se ha mostrado en párrafos

[3] Una exposición más amplia del proyecto y sus resultados se encuentra en Azcárate y Camacho (2003)

anteriores, con las investigaciones realizadas se ha podido ofrecer un aporte teórico, al diferenciar dos acepciones en la noción de esquema conceptual: la cognitiva y la epistemológica. Las caracterizaciones epistemológicas aportan un conocimiento relevante que puede servir como marco de referencia para interpretar factores determinantes en los procesos de conceptualización de los infinitesimales por parte de los alumnos. En esta área del conocimiento PMA, empíricamente, se han encontrado y caracterizado rutas formales e informales de aprendizaje (Pinto, 1998; Pinto y Tall, 1999, 2001; Tall, 2001), sin embargo con la profundización empírica y estudio de caso realizado (Valdivé y Garbin, 2010), se caracteriza una nueva ruta de aprendizaje llamada *mixta*. Esta permite ver cómo el estudiante enriquece sus esquemas conceptuales, cuando no usa sólo una ruta netamente formal o netamente intuitiva. Queda seguir profundizando en cómo consolida el estudiante la conceptualización del objeto matemático comparando las distintas rutas de aprendizaje.

En estas investigaciones fundamentalmente los sujetos de estudio son los alumnos. Los métodos de recogida de datos son de tipo cualitativo. Son investigaciones donde el interés es el aprendizaje, el análisis de datos es inductivo ya que las interpretaciones se construyen a partir de la información obtenida, pueden ser cuestionarios elaborados por el docente investigador y/o entrevistas semi-abiertas grabadas. El foco de investigación es de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Las investigaciones de tipo *histórico-epistemológicas* se realizan, con libros de texto, libros de autores clásicos de análisis matemáticos y libros de historia de las matemáticas. La estrategia de recogida de información es según sea el caso: a) el análisis de materiales escritos, llegados a ser considerados como instrumentos cuasi-observables que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador (Woods, 1987); b) el análisis de datos de tipo cualitativos, la información se analiza y se codifica de acuerdo con códigos y categorías, y se construyen la *Redes Sistémicas* y/o c) *Estudio de caso* de tipo interpretativo y descriptivo. Se van validando las formas de análisis metodológicos y de respuestas de los estudiantes, validando y triangulando los diferentes resultados y hallazgos.

Cabe afirmar que Harel, Sendel y Sendel (2006) afirman que en la etapa de transición del PME al PMA no se ha investigado aún lo suficiente, lo cual queda este período necesitado de mayor estudio y profundización.

Por otra parte, existe un grupo aún considerado no muy grande (Harel, Sendel y Sendel (2006) de investigadores que están interesados en cómo investigan los matemáticos de profesión, bajo el supuesto que esto puede dar buena información para el área de la Educación Matemática y específicamente para entender el desarrollo del PMA. También Tall (2013) se interesa de cómo se construye el pensamiento matemático, del matemático teórico al matemático formal, rompiendo así toda frontera y permaneciendo éste, en el pensamiento formal conjeturando y demostrando consecutivamente.

Finalmente, Garbin y Valdivé, expanden su línea de investigación desarrollando un nuevo Proyecto de investigación[4] y que abre nuevas perspectivas de investigación a futuro por lo incipiente que es el área. El trabajo pretende responder a la pregunta cómo cognitivamente, el matemático de profesión genera nuevos problemas, estudia posibilidades y estructura nuevas conjeturas, para llegar a una demostración matemática formal. Estudiar este proceso cognitivo de construcción matemática y de demostración, justificación, verificación y prueba, puede dar *luces* y nuevo entendimiento sobre el proceso de construcción matemática y de demostración que requiere hacer un estudiante de matemáticas a lo largo de su escolaridad y en la universidad.

Referencias

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2), 135-149.

Cantoral, R. y otros (2000). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Trillas.

Carpenter, T. P., Dossey, J. A., y Koehler, J. L. (Eds.). (2004). Classics in Mathematics Education Research (p. 226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chae, S. y Tall, D. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics (Vol2, pp. 121-132).

Chin, E. y Tall. D. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. En Nakara, T., y Koyama, M. (Eds.), Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 2, pp.177-184). Utrecth, The Netherlands.

[4]Proyecto aprobado Nro. 004-AC-2015 por CDCHT de la UCLA

Chin, E. y Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. En Marja, V. (Ed.), Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol 4, pp. 241-248). Utrecth, The Netherlands.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis Doctoral: Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P y Kilpatrick, J. (Eds.), Mathematics and Cognition (pp. 113-134). Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp.3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Relime, 3 (1), 47-70.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. Some PME perspective. En Gutierrez, A. y Boero, O. (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp.147-172). The Netherlands: Sense Publishers.

Garbin, S. y Azcárate, C. (1998). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. Educación Matemática, 12, 5-18.

Garbin, S. (2000). Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años. Tesis doctoral: Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. Suma, 38, 53-67.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito Actual e Inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las Ciencias, 20 (1), 87-113.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (2), 169-193.

Garbin, S. (2007). La Problemática Fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico. Paradigma, XXIII, 79 - 108.

Garbin, S y Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la noción de dimensión en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 27 (2), 223 – 240.

Pinto, M. (1998). Students' Understanding of Real Analysis. Tesis doctoral no publicada. University of Warwick, Inglaterra.

Pinto, M. y Tall, D. (1999).Students constructions of formal theory: living and extracting meaning. Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol. 2, pp. 41-48). Haifa, Israel.

Pinto, M. y Tall, D. (2001).Following students' development in a traditional university classroom. En Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Eds.), Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (Vol. 4, pp. 57-64). Utrecth, The Netherlands.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. Educational Studies in Mathematics 55 (1 y 3), 103-132.

Przenioslo, M. (2005).Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. Educational Studies in Mathematics, 60 (1), 71-93.

Sternberg, R. J.(1996). What is mathematical thinking? En R.J. Sternberg y Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 303-318). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. (1991).The psicology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 3-21). Kluwer Academic Publisher: Dordrecht/Boston/London.

Tall, D. y Gray, E. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a “proceptual” view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (2), 116-140.

Tall, D. (1995).Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Actas del PME 19,1. 61-75.

Tall, D. (2004).Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 1-16). Bergen, Norway.

Tall, D. (2001).Natural and formal infinities. Educational Studies en Mathematics, 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, D (2013).How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge University Press.

Valdive, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, Relime, 11(3), 413-450.

Valdive, C. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de análisis matemático. Tesis doctoral: UCLA-UNEXPO-UPEL, Barquisimeto.

Valdive, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: caso del alumno (2), Educare, 14 (3), 3 - 31.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). ¿Cómo piensan los estudiantes el infinitesimal antes de iniciar un curso de análisis matemático? Paradigma, 34(1), 117-144.

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. Bulletin de l'APMEP 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible en: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 177-184). Berkeley: University of California, Hall of Sciencie.

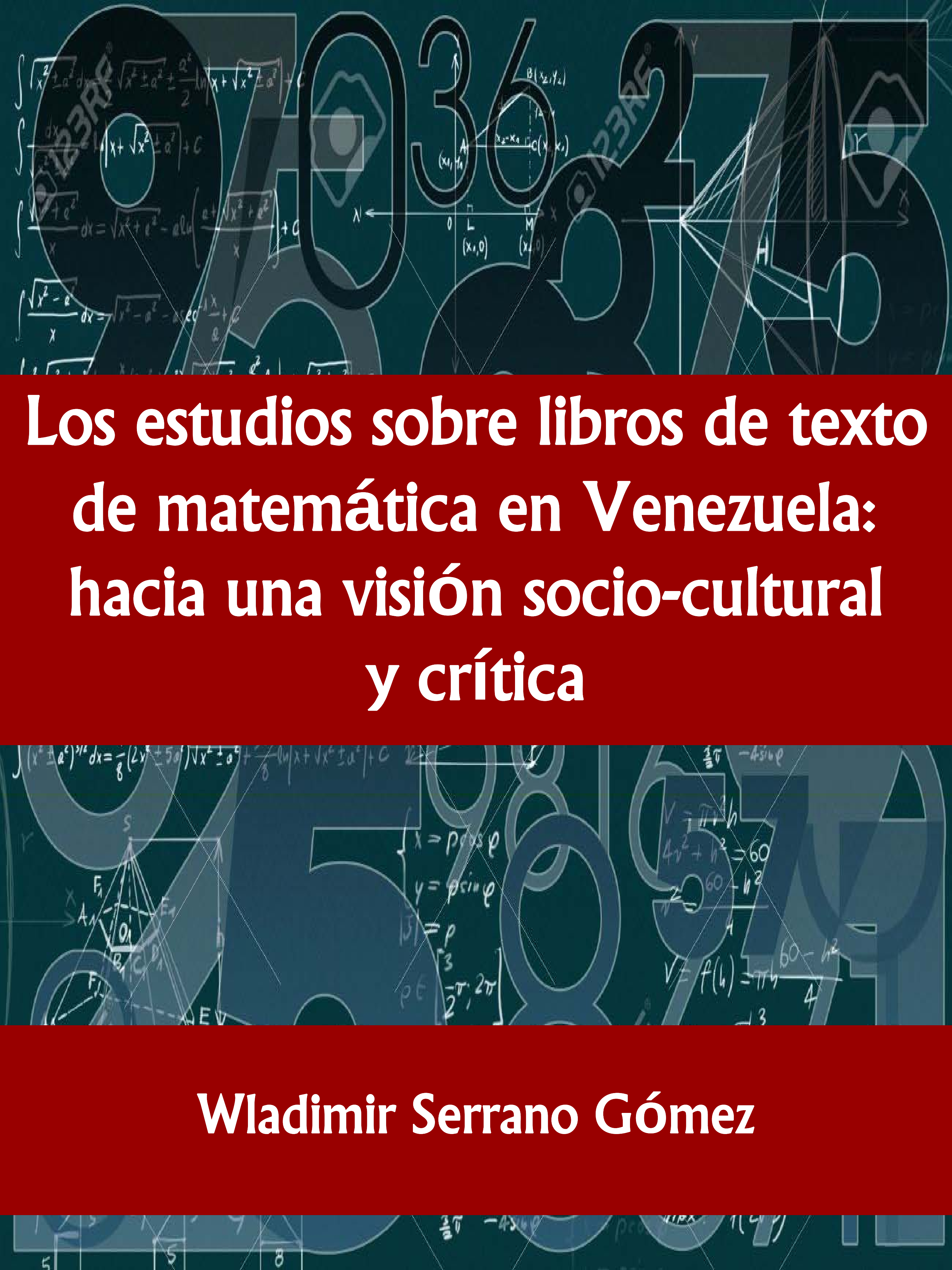
Watson, A. y Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 369-376). Norwich, UK.

Watson, A, Spyrou, P. y Tall, D. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. Educational Studies in Mathematics, 3, 1-24.

Woods, P. (1987). La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa. Barcelona: Paidós.

Sabrina Garbin D.

Doctora por la Universidad Autónoma de Barcelona, España (UAB), en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Magister en Matemáticas por la Universidad Simón Bolívar (USB). Profesor de Matemáticas, mención Matemáticas por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Instituto Pedagógico de Maracay. Actualmente es Profesora Titular a Dedicación Exclusiva de la Universidad Simón Bolívar del Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas. Ha sido miembro del grupo de investigación: “Procesos de Pensamiento Matemático Avanzado (Didáctica del Análisis)”dirigido por la Dra. Carmen Azcárate en la UAB (España). Trabaja en el área de Didáctica de las Matemáticas y del Análisis y en Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado. Tiene varias publicaciones en Revistas especializadas arbitradas. Asimismo, es árbitro de algunas revistas del ámbito de la educación matemática. Ha sido integrante del jurado de varios trabajos de postgrado. Ha dirigido trabajos de grado de Especialización y tesis de Doctorado. Participa en Congresos Nacionales e Internacionales.



Los estudios sobre libros de texto de matemática en Venezuela: hacia una visión socio-cultural y crítica

Wladimir Serrano Gómez

Los estudios sobre libros de texto de matemática en Venezuela: hacia una visión socio-cultural y crítica

Sobre los intereses y perspectivas

Los libros de texto de Matemática (categoría que en el marco de este reporte reúne a las publicaciones en papel diseñadas exclusivamente como un recurso para la enseñanza/aprendizaje de esta área del conocimiento por parte de estudiantes y docentes en el Sistema Educativo, abarcando capítulos dentro de libros de tipo enciclopédico, cuadernos de trabajo o problemarios, entre otros), son un reflejo de los programas y planes de estudio oficiales, de las políticas nacionales en torno al libro, de procesos culturales ajenos o foráneos impuestos en nuestras latitudes, tal es el caso del Movimiento de la Matemática Moderna desde las cercanías a la década que inicia en 1960, e incluso, de un proceso mucho más complejo y amplio: el neocolonialismo. A su vez, los libros de texto ejercen una gran influencia en el proceso de enseñanza/aprendizaje, esto es, en el currículo que se concreta en la práctica. Éstos proponen ciertos modelos didácticos para el trabajo en el contexto del aula, se distancian o no del pensamiento pedagógico libertario-nuestroamericano, configuran una posición sobre la matemática escolar y la matemática en sí misma, e inciden en la valoración que se le da a la mujer, a los pueblos indígenas, a la negritud, al papel de la empresa privada en la vida nacional, al contexto socio-cultural, a la ciudadanía democrática y a nuestra identidad, entre otros aspectos.

La historia de los libros de texto de Matemática en la República Bolivariana de Venezuela es muy rica y pasa por atender, al menos, los siguientes puntos: la publicación/edición en suelo patrio, durante la época de la lucha por la Independencia, de las primeras obras matemáticas para niñas y niños, el uso de libros influenciados por corrientes pedagógicas como la "Escuela Nueva", el sello que dejó el "Movimiento de la Matemática Moderna" en nuestras tierras, el papel que desempeñaron las editoriales privadas, fundaciones, trasnacionales y otras instituciones ajenas a los intereses patrios (término con el que queremos abarcar los ideales libertarios y el pensamiento Bolivariano) desde las cercanías al año 1960, se le ha dado un peso importante al libro de texto en el seno del aula (en comparación con otros recursos y materiales impresos), los manuales empleados en el contexto de las misiones educativas, la publicación y distribución gratuita, a partir de 2011, de los libros pertenecientes a la Colección Bicentenario (para la

Educación Inicial, Primaria y Educación Media General), así como las políticas educativas en sí mismas en torno al texto escolar y el contexto que envolvió cada uno de estos hechos. Pensando en este amplio panorama, son pocos los estudios publicados en los que el libro de texto de la Matemática Escolar (esto es, para la Escuela Primaria o Educación Media General) sea el objeto de investigación. Por ejemplo, Mora (1999, 2002) incluía el estudio de los libros de texto de la Matemática Escolar (desde la perspectiva crítica de la educación matemática) como uno de los temas que deberían atender las y los profesores.

Uno de tales estudios es el de Boris Bossio, precisamente uno de los autores de libros de texto de Matemática más prolíficos desde mediados de la década que inicia en 1940 hasta la entrada del movimiento de la matemática moderna. Su artículo *Las matemáticas y su enseñanza* (1941), publicado en *Educación: Revista para los maestros*, sostiene que los libros de texto deben fundarse en problemas, y además era de la idea de que las Matemáticas Escolares se vincularan estrechamente con la realidad (con las necesidades de la niña y del niño, de la o del maestro, de la Escuela, con los recibos, las facturas, las instalaciones domésticas, las características de la región, etc.).

Las publicaciones de Boris Bossio son objeto de estudio del amplio reporte de Beyer (2009); éste construye un espectro muy completo del universo de los libros de texto de las Matemáticas Escolares utilizados en estas tierras desde 1826 (año en que se cree se dio la primera publicación de un libro de esta naturaleza en nuestro país) hasta 1969 (justo el momento en que este autor fija la influencia del Movimiento de la Matemática Moderna), así como su periodización, análisis de su estructura y modelos pedagógicos presentes en éstos, para lo cual se apoya, entre otros constructos, en la tesis de la “transposición didáctica”, propia de la Didáctica Francesa –también conocida como Didáctica Fundamental. En la misma “línea histórica”, y en lo referente a las matemáticas escolares, podemos mencionar los trabajos de Brito (2002, 2004), Beyer (2004, 2006, 2009), Bolívar (2005), Beyer y Bolívar (2008); los cuales se dedican (a) a estudiar a importantes miembros de la comunidad de educación matemática y matemática venezolana previo a la incidencia del Movimiento de la Matemática Moderna en nuestras tierras, además de Boris Bossio, como señalamos antes, incluye a Raimundo Chela, Duarte y Zavrotsky, (b) los libros de aritmética publicados en nuestro país entre 1812 y 1826, y (c) los libros de matemáticas escolares escritos en modo “catecismo”. En el marco de este interés hallamos el de Alzate y Fernández (2009), propuesto ante el *VI Congreso Ibero-Americano de Educación Matemática*, que trata algunos aspectos referidos a la aritmética comercial en nuestra República desde sus orígenes, poniendo énfasis en los libros de texto publicados en esta área.

Así, los reportes de Beyer, junto con algunos de los que ha asesorado, conforman una fuerte línea de investigación sobre los libros de texto empleados en nuestra República antes del impacto de la Matemática Moderna –que aquí denominamos, como hicimos, línea histórica.

Mosquera es otro de los autores venezolanos que se ha dedicado al estudio histórico de los libros de texto de matemáticas venezolanos, fundamentalmente los que datan desde las cercanías al año 1960. Aunque en sus trabajos se intersecan algunas de las líneas o intereses que describiremos más adelante. En *Los materiales educativos impresos como objeto de estudio en Venezuela: El caso del Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro"* (Mosquera, s.f.) analiza la investigación, publicaciones y producción de los libros de texto en el seno de la *Maestría en Materiales Educativos Impresos* del Instituto Pedagógico Rural El Mácaro (de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador). No obstante, también refiere a las etapas en que este autor divide tal producción: una de ellas se identifica con el proyecto multinacional que inició en 1970, en el que participó nuestro país, y que fue impulsado por la Organización de Estados Americanos (OEA) y la Organización para las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Y la otra etapa la asocia con la creación de la Maestría que citamos antes, justo desde 1996.

De acuerdo con este trabajo, en la primera etapa, en lo que nos concierne, podemos citar a Peña-Mora (1981), quien describió las características deseables de los libros de texto de Matemática para la Educación Básica; Réquiz, Mercado, Guzmán y Rodríguez (1972) sobre los libros de Matemática y Ciencia para la Escuela Primaria; y, por ejemplo, el de Qüenza (1986). Ya en la segunda etapa, en específico entre los años 1998 y 2006, se presentó una única tesis (o trabajo de grado) en el área de la Matemática Escolar (cuyo objetivo central fue la elaboración de un manual para el docente en el área de Geometría).

Por otra parte, hay reportes que dan cuenta del estudio de libros de texto de las Matemáticas Escolares "en uso", esto es, sobre libros que en el momento de la investigación estaban siendo utilizados en las Escuelas que consideraron.

González (2011) presenta algunas de las fuentes para reconstruir la historia de la educación matemática en la República Bolivariana de Venezuela, entre las cuales incluye al estudio de los libros de texto como una de las medulares, aunque sólo expone un ejemplo: el trabajo de grado de maestría de Pinto (2009) (el cual se dedicó a estudiar el enfoque didáctico dado a las ecuaciones lineales en libros de texto empleados en nuestro país en lo que hoy en día es el 1er año de la Educación Media General en el período 1987-2007). Y en González (2012) se citan, además, los de Beyer. Asimismo, García (1999) considera 18 libros de texto de las matemáticas escolares de 1er, 2do y 3er grado de la Escuela para describir, entre otros aspectos, las competencias matemáticas a que se dirigen estos escritos, sus modelos pedagógicos y el tipo de evaluación que estos promueven. Serrano (2009), en cambio, pone su atención en una selección de libros de texto de Matemáticas utilizados en lo que anteriormente se denominó 7º grado de la Educación Básica (hoy en día 1er año de la Educación Media General), en especial en la naturaleza de las actividades matemáticas propuestas en éstos, las "funciones" que son asignadas por el texto al saber o conocimiento matemático, sustentándose en la categorización que hace Bishop (1999) para las actividades matemáticas y en la idea del saber matemático escolar y su posible relación con el hecho de identificar la educación matemática como un proceso de "entrega/recepción (del saber matemático)", "de perpetuación de las injusticias y desigualdades", o "de formación de la ciudadanía, la conciencia y la crítica".

Mosquera (2010b) analizó tres (3) libros de texto (uno de Matemática, uno de Ciencias de la Naturales y uno de Ciencias Sociales) del 6to grado de la Escuela Primaria a la luz del respeto a la diversidad contemplado en la primera Constitución aprobada en nuestro país a través de un referéndum.

Y Adames (2002), aunque referido a la Educación Media General, estudia el enfoque didáctico dado a las inecuaciones en libros de texto de Matemáticas.

También podemos referir, en lo concerniente a los libros de texto de Matemática, los reportes verbales que sobre el enfoque pedagógico y didáctico de los libros de esta área pertenecientes a la Colección Bicentenario ha realizado el Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIDEM), así como sus reportes parciales en cuanto a la "ideología" asociada a algunos de los libros de Matemática publicados por las editoriales privadas que tienen acá presencia –ver Becerra (2014), Paredes (2014) y Serrano (2015); los cuales se han enmarcado en los planes de investigación y formación permanente que ha impulsado el Ministerio del Poder Popular para la Educación desde el año 2011 con motivo de la publicación de los libros de texto de Matemática de la Colección Bicentenario, y muestran algunos de los contrastes entre la educación matemática que caracteriza a algunos de los libros de las editoriales privadas empleados en Venezuela y los que corresponden a esta colección, en particular la conceptuación de ciertos objetos matemáticos, la estructura de los capítulos o lecciones, si hay presencia en ellos o no de lo que se entiende por "enfoque algorítmico", de los valores o antivalores que pueden entreverse en el texto, los tipos de problemas y actividades que proponen, la naturaleza de sus aplicaciones, entre otros aspectos.

Por otro lado, Míguez (2000, 2003), en el marco de una línea de investigación sobre libros de texto y otros materiales escritos de Matemática en el contexto escolar venezolano (desarrollada en el marco de la Universidad Nacional Abierta), realizó una distinción entre los términos ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas, con la intención de caracterizar algunos de los elementos que conforman una lección (o capítulo) de un libro u otro escrito pensado como apoyo a los procesos de aprendizaje-enseñanza de esta área del conocimiento pensando en una "educación a distancia". Tal estudio se apoyó en la idea de "praxema" (de Chevallard), propia de la Didáctica Fundamental, así como en la discusión de la "suficiencia" para el aprendizaje de estos elementos. También ha discutido sobre las características que debe tener un material escrito para la matemática escolar (para la Educación Primaria venezolana) (Míguez, 2010), basándose en el análisis de los instrumentos elaborados por el Centro de Capacitación Docente "El Mácaro". En otro reporte, este autor, aun cuando no refiere a las matemáticas escolares, realizó un análisis comparativo de dos libros de texto de Matemática para el ámbito de la Universidad Nacional Abierta, en especial sobre las concepciones y propuestas didácticas con el que tales libros "tratan" la idea del "orden en". Además, propone una estructura para una lección de matemática para una educación no presencial (Míguez, 2007). En Míguez (2004) se estudió el tipo de actividades o lecciones que pueden orientar la enseñanza de la Geometría en el contexto escolar venezolano (en especial para el entonces 7º grado de la Educación Básica) partiendo de los resultados que publicó el entonces Ministerio de Educación (1998a, 1998b, 1999) a través del Sistema Nacional de Medición y Evaluación de los Aprendizajes (SINEA), en particular sobre algunos de los descriptores de la Geometría escolar desde la óptica de las pruebas aplicadas a nivel nacional en 3er, 6to y 9no grados de la denominada para ese momento Educación Básica venezolana, tal es el caso del carácter descontextualizado en el cálculo de áreas y perímetros, las limitaciones que trazan las preguntas y actividades propuestas al abarcar sólo el reconocimiento de las figuras o cuerpos geométricos, la "fórmula" asociada a éstas y éstos, así como la memorización de teoremas sin considerar la utilidad o aplicación de los mismos en otros contextos.

También podemos citar acá algunos de los reportes que tuvieron como objetivo elaborar y/o aplicar un instrumento de evaluación de los libros de texto de la Matemática Escolar, tal como fue el interés de los trabajos de Qüenza y otros (1972), Aguilary otros (1981) y Qüenza (1985), aunque como sabemos, referidos a libros de todas las disciplinas en las que estaba organizado el currículo de la Educación Primaria y Educación Media General –como la denominados hoy en día. Tal es el caso de Ferreira y Mayorga (2010). Este último construyó un instrumento para los libros de Matemática de cualquier nivel atendiendo a criterios para la estructura del libro en sí mismo, del contenido y de sus características físicas, motivado por la no evaluación de los libros de texto de Matemáticas por parte del Ministerio del Poder Popular para la Educación desde el año 1998 y la necesidad de aportar un modelo de instrumento con el que las y los profesores pudieran sostener sus decisiones para recomendar y utilizar este recurso en el contexto del aula. Una de estas autoras también publicó un estudio sobre los tipos de tareas y técnicas (entre otros aspectos) presentes en un libro de texto del 3er año de la Educación Media venezolana, en especial al tratar el tema de “función lineal” (siguiendo también a la Didáctica Fundamental) (ver Mayorga, 2013). Y, los de Bustamante (2015) y Chacón (2015) (asesorados por quien escribe) se propusieron, respectivamente, elaborar un instrumento de evaluación de libros de texto de Matemática para la Educación Media General y, evaluar el libro de texto de Matemática de 6to grado de la Colección Bicentenario desde la categorización que hace Bishop (1999) para las actividades matemáticas y sus vínculos con la realidad y el contexto.

Fuera del campo de la Matemática Escolar venezolana hay estudios que han considerado como objeto de investigación un amplio número de libros de la totalidad de las disciplinas del currículo oficial o bien de docentes. En esta línea se hallan, por ejemplo, los de Esté y otros (1995) y el de Ramírez (2012). El primero de ellos focaliza su atención en el rol del libro de texto en la actividad que se concreta en el contexto del aula tomando como objetos de estudio cerca de 1700 libros desde el 1er grado de la Escuela hasta el 5to año de la hoy Educación Media General. Y el segundo en las representaciones del texto escolar en una muestra de 1690 docentes de aula en varias regiones del país, así como de las políticas en relación con el texto escolar a partir del año 1958 (desde lo que este autor denomina “nacimiento de la democracia venezolana”) hasta el año 2005 (casi hasta mediados de la gestión del Presidente Hugo Chávez). No obstante, hay referencia de otra serie de trabajos de éstos y otros autores/as venezolanos/as en áreas como las Ciencias Naturales, las Ciencias Sociales o la Lengua Castellana y la Literatura, en particular sobre algunos elementos del “currículo oculto” presente en ellos, sobre el género en las ilustraciones de los libros, las concepciones sobre la lectura y la escritura y sobre los modelos didácticos que le son propios, entre otros aspectos; casi todos publicados como artículos en revistas especializadas nacionales o internacionales, y muy pocos como libros de consulta por parte de las Universidades u otras instituciones –de los cuales no haremos aquí mención.

Algunas direcciones

Así, la investigación sobre libros de texto de la Matemática Escolar venezolana ha marcado algunas direcciones bien diferenciadas.

(1) Una de ellas tiene que ver con considerar estas producciones escritas como uno de los elementos centrales para **historiografiar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas** de la Escuela Primaria y la Educación Media General, distinguir influencias teóricas foráneas o no, pero también de ciertos autores (en esencia: españoles y franceses) en la escritura de los libros publicados en nuestro país por autores/as venezolanos/as, sus enfoques pedagógicos y didácticos, su relación con el contexto socio-económico y político, la evolución de un autor a través del tiempo, entre otros aspectos.

(2) Otra lo es la **evaluación del libro en sí mismo(en especial los que se encuentran "en uso")** atendiendo a una diversidad de factores como su correspondencia con los programas y el currículo oficial, su papel en la "dirección" de la actividad que llevan a cabo la o el docente y las o los estudiantes en el contexto del aula, su estructura, la naturaleza de las actividades (ejercicios, problemas, ejemplos, proyectos y otros) propuestas y desarrolladas en el texto, si se asocian o no con el "enfoque algorítmico", sus vínculos con la realidad local, regional o mundial, el diseño de instrumentos de evaluación, la fundación epistémica de un concepto, entre otros.

(3) Y por otra parte, se han dado también, particularmente durante los últimos años, algunos trabajos en la dirección de desvelar los **vínculos del libro con el mercado, la supuesta neutralidad política de la educación (y de la educación matemática en especial), las grandes editoriales privadas, trasnacionales e intereses foráneos**, motivados quizás por el intenso debate que sobre el libro de texto se ha dado recientemente (desde 2011) con motivo de la publicación y

distribución gratuita de los libros de texto de la Colección Bicentenario por parte del Estado venezolano y de la oposición que ello ha causado en las casas editoriales que manejaban hasta la fecha el monopolio absoluto en este ramo en nuestro país (ver, por ejemplo, Serrano, 2009). Una investigación que consideramos importante en esta línea es la de Mosquera (2010a) (aunque lo dedica a la entonces llamada Educación Secundaria). Esta línea la consideramos de suma importancia para la educación matemática, en particular en el ámbito de *nuestramérica*.

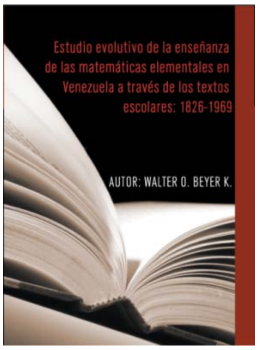
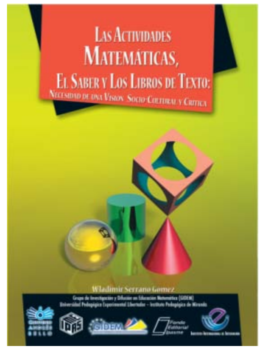
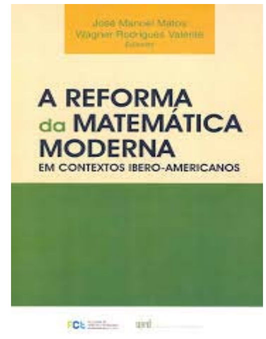
Además, luego de la publicación de los libros de Matemática (y de otras áreas) de la Colección Bicentenario, se han dado algunas comunicaciones orales, foros, conferencias y mesas, fundamentalmente desde la ASOVAC (Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia), la UCV (Universidad Central de Venezuela) y la UCAB (Universidad Católica Andrés Bello), en las que han debatido sobre su enfoque, contenidos, actividades propuestas y sobre su particular forma de entender la "ideología", tal es el caso de la "revisión especializada de los libros de la Colección Bicentenaria (sic)" realizada en el contexto de la LXIV Convención Anual de la ASOVAC en 2014 o los comunicados de la ACFIMAN **(**Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales). Todos los cuales son parte natural del debate pedagógico. No obstante, es justo mencionar que este "interés" que han despertado los libros de Matemática de la Colección Bicentenario en parte de la comunidad de investigadoras/es y/o profesoras/es de estas y otras instituciones venezolanas, como algunas ONGs (Organizaciones no Gubernamentales –tal es el caso de Asamblea de Educación) no fue el mismo que el que se pudo haber asociado, con anterioridad al año 2011, a los libros de Matemática publicados con las editoriales privadas que tenían una presencia destacada en la comercialización del libro escolar. Las actas, memorias y revistas de estas instituciones no reflejan, en el largo período que comprende la incidencia del Movimiento de la Matemática Moderna en nuestras latitudes y el año 2011, un peso especial o interés en los libros de texto de Matemáticas (o de las Ciencias Naturales). Su foco ha estado más bien en la contribución al desarrollo e investigación científica.

Mención especial tienen algunos trabajos en el campo de la enseñanza-aprendizaje de la Física y los libros de texto de la entonces llamada Educación Secundaria (que no citaremos aquí), así como un editorial de una de las primeras actas de la Asociación que alertaba sobre el hecho de que la educación en su conjunto no estaba formando para proseguir una carrera en el campo de la investigación científica (Martín, Texera y Cilento, 2005) –por cierto, escrito por un egresado del entonces Instituto Pedagógico Nacional: el Profesor Alonso Gamero**.**

Volviendo al punto de la investigación sobre libros de texto, una orientación que podrían seguir algunos de los estudios en cualesquiera de las tres líneas anteriores sería considerar como una de las fuentes de análisis e interpretación:

(4) **Los cuadernos de apuntes de las y los estudiantes** junto con el o los libros que empleaban en sus cursos; lo cual no ha tenido hasta la fecha resonancia en la comunidad de investigadoras/es en educación matemática, pero que podría enriquecer la lectura que hagamos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que se lleva a cabo en nuestros países. En el ámbito internacional uno de ellos es el de Lemey Rodrigues (2009), en el que se parte de las notas de clase tomadas por estudiantes entre la década de 1930, momento en el que se dio (en Brasil) la propuesta de fusión de las ramas de la matemática escolar, y la de 1960, justo la época en la que incide en su país el Movimiento de la Matemática Moderna. También, el estudio de 781 cuadernos de la escuela primaria Argentina fechados entre 1930 y 1970, llevó a caracterizar el discurso escolar presente en ellos (Gvirtz, 1999). Incluso, los cuadernos de las y los estudiantes han sido insumo importante para evaluar el impacto de ciertas reformas educativas por parte del Estado, tal es el caso de la investigación emprendida en Argentina, como vemos en Augustowsky y Vezub (1998), dirigida desde el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, con motivo de la transformación curricular de los años 1997 y 1998; lo cual ha sido poco común en el resto de los países Latinoamericanos y Caribeños, y hasta donde conocemos, no ha sido llevado a cabo (en tal magnitud) en la República Bolivariana de Venezuela.

Para finalizar esta sección queremos comentar que de la totalidad de estos reportes e investigaciones, sólo los trabajos de Beyer (2014), Serrano (2009) y Mosquera (2010a) han sido publicados como libro. Los dos primeros a través del convenio entre el GIDEM, el Fondo Editorial del IPASME y el Instituto Internacional de Integración (el primero de ellos está disponible en línea y, el segundo, se distribuyó gratuitamente en el marco de las jornadas y programas nacionales de formación permanente tanto para la Escuela como para el Liceo – durante la gestión ministerial que cristalizó en 2011 el proyecto del presidente Hugo Chávez de publicar y distribuir gratuitamente libros (y otros recursos) para las y los estudiantes, esto es, de las profesoras Maryann Hanson y Maigualida Pinto); y el tercero como un capítulo del libro *A reforma da Matemática Moderna em contextos Ibero-Americanos* que editaron Matos y Rodrigues (2010).

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2009</td>
<td>2009</td>
<td>2010</td>
</tr>
<tr>
<td>Walter Beyer</td>
<td>Wladimir Serrano</td>
<td>Mosquera (2010).
En: Matos y Rodrigues (2010)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Tres de las publicaciones recientes (en formato libro) que versan sobre los libros de texto de la Matemática Escolar en la República Bolivariana de Venezuela</td>
</tr>
</table>

También, Walter Beyer, Julio Mosquera, Ángel Míguez, son tres de los tres autores venezolanos que han hecho de los libros de texto de la Matemática Escolar una de sus líneas de investigación (y los tres laboraron o laboran en la Universidad Nacional Abierta); así como Liliana Mayorga (una de las pocas mujeres en este grupo – de la Universidad de Carabobo) y quien escribe este capítulo (del Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática y de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador).

Necesidad de una visión sociocultural y crítica. A manera de cierre

Atendiendo a la revisión que hemos hecho, junto a la consideración de la influencia que han tenido para la educación matemática venezolana tendencias como el Movimiento de la Matemática Moderna, agentes foráneos como grandes empresas, el Banco Mundial, la UNESCO y ciertas ONGs (en nuestro país, fundaciones de la *Shell* publicaron libros para la Educación Básica, los cuales fueron avalados por el Ministerio de Educación de la época), ciertos proyectos *estandarizadores* como las pruebas PISA, el enfoque presente en los libros de Matemática publicados por las trasnacionales del libro (entre ellas Santillana), su concepción mercantil del libro y el currículo al que propenden, e incluso, algunos aspectos de la formación profesional del y de la docente, consideramos relevante el impulso de estudios sobre los libros de texto de Matemática venezolanos desde una perspectiva socio-cultural, crítica y nacional. Con lo cual, aspectos como el papel del contexto y de la realidad, la modelación matemática, la actividad matemática que desarrollen las y los estudiantes, las aplicaciones, el tipo de problemas que se aborden, la interdisciplinariedad, los vínculos con la ciencia, la tecnología, la innovación, el ámbito socio-productivo y la historia, así como la formación de la ciudadanía en el marco de una democracia participativa y protagónica, serían algunos de los potenciales temas de discusión, en especial para los espacios de investigación y formación permanente que se han estado impulsando en las Escuelas y Liceos venezolanos.

En este sentido, los libros de Matemática de la Colección Bicentenario representan, a nuestro juicio, una contribución a tal debate en tanto se orientan a la construcción real de una educación matemática que se aproxime a los grandes principios trazados por la Constitución de 1999, sus leyes, al contexto venezolano, a la necesidad de formación de niños, niñas y jóvenes desde una perspectiva crítica y humana, y además pueden motorizar espacios de resistencia a la neocolonización. La férrea oposición que éstos han generado en ciertas esferas de la derecha da cuenta de ello.

Referencias

Adames, M. (2002). Estudio sobre el tratamiento de las inecuaciones en libros de texto de Matemáticas. Trabajo de grado. Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Aguilar, L., Castillo, J., Contreras de Pino, I., Jaen de Castillo, A., Longart; E., Peña Mora, H., Salazar, F. y Tejada, L. (1981). Problemática de los materiales educativos impresos. Turmero, Aragua: IPR El Mácaro.

Alzate, L. y Fernández, S. (2009). La aritmética comercial en Venezuela desde sus orígenes. Ponencia presentada en el VI Congreso Ibero-Americano de Educación Matemática.

Augustowsky, G. y Vezub, L. (1998). Estado de situación de la transformación curricular en el marco de la reforma educativa (1997-1998). Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Becerra, R. (2014). El área de matemática y los libros de la Colección Bicentenario: en contexto y con pertinencia social. La ideología en los libros de texto. Presentación oral. Jornadas de Investigación y Extensión de la Facultad de Ciencias. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Beyer, W. (2009). Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969. La Paz: Convenio Andrés Bello – GIDEM – Instituto Internacional de Integración.

Beyer, W. y Bolívar, W. (2008). Análisis de textos primarios: la obra de Boris Bossio Vivas. Investigación, 17(1), 3-29.

Beyer, W. (2004). Bossio, Chela, Duarte y Zavrotsky: Un lazo de oro para la matemática y la educación matemática en Venezuela. En Mora, D. (Ed.), Tópicos en Educación Matemática (pp. 183-202). Caracas: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

Beyer, W. (2006). Algunos libros de aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. Revista de Pedagogía, XXVII (78), 71-110.

Bishop, A. (1999). Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidós.

Bolívar, W. (2005). Boris Bossio Vivas: Su obra, aportes e impacto. Trabajo de Grado de Licenciatura. Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Bossio, B. (1941). Las matemáticas y su enseñanza. Educación. Revista para los maestros, 2(16), 7-8.

Brito, O. (2002). Los libros de matemáticas en la Venezuela del siglo XIX. Trabajo de Grado de Licenciatura. Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Brito, O. (2004). Panorama matemático en la Venezuela colonial. En Mora, D. (Ed.), Tópicos en Educación Matemática (229-249). Caracas: Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática (GIDEM).

Bustamante, K. (2015). Criterios para analizar los libros de texto de matemática. Trabajo de Grado de Maestría. Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas.

Chacón, M. (2015). El libro de texto de matemática del 6to grado de la Colección Bicentenario, sus actividades matemáticas y el contexto. Trabajo de Grado de Maestría. Instituto Pedagógico de Miranda, Miranda.

Esté, A. y otros (1995). El Libro de Escuela en Venezuela. Fundamentación teórica para su evaluación y producción. Análisis de las características estructurales y lingüísticas del texto escolar. Caracas: Jema.

Ferreira, M. y Mayorga, L. (2010). Propuesta para la evaluación de los libros de texto de matemática de todos los niveles educativos. Ciencias de la Educación, 20(35), 15-28.

García; Y. (1999). Análisis de contenido del texto escolar de Matemática según las exigencias educativas del nuevo milenium. Tesis doctoral. Universidad Dr. Rafael Belloso Chacín, Maracaibo.

González, F. (2011). Inventario de Historia de la Educación Matemática en Venezuela. Comunicación oral presentada en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife – Brasil.

González, F. (2012). Fuentes para una reconstrucción histórica de la educación matemática en Venezuela. Quipu, vol. 14, núm. 1, enero-abril de 2012, 33-54.

Gvirtz, S. (1999). El discurso escolar a través de los cuadernos de clase. Argentina 1930-1970. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Leme, M. y Rodrigues, W. (2009). Na oficina do historiador da educacao matemática: cuadernos de alunos. Comunicación presentada en el VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 516-517.

Martín, J., Texera, Y. y Cilento, A. (2005). Un archivo para la historia: acta científica venezolana 1950-2000. Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico.

Matos, J. y Rodrigues, W. (Eds.) (2010). A reforma da Matemática Moderna em contextos Ibero-Americanos. Caparica, Portugal: Unidade de Investigação, Educação e Desenvolvimento. Disponible en: http://run.unl.pt/bitstream/10362/5321/1/Matos_2010.pdf

Mayorga, L. (2013). Organizaciones matemáticas en el libro de texto. Un estudio en el contenido de función lineal en el tercer año de Educación Media Venezolana. Ciencias de la Educación, 23(42), 69-82.

Míguez, Á. (2000). Ejemplos, ejercicios y problemas: objetos Matemáticos de uso indiscriminado en el aula, en los libros de texto y demás materiales escritos de matemática en el contexto escolar venezolano. Ponencia presentada en el Instituto Pedagógico de Caracas.

Míguez, Á. (2003). Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en las actividades de aprendizaje de la matemática. Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV (35), enero-abril.

Míguez, Á. (2004).Herramientas para el análisis de una lección de Geometría. Ponencia presentada en la X Jornada de investigación Educativa y I Congreso Internacional de la Escuela de Educación. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Míguez, Á. (2007). Cómo estructurar una lección de matemáticas para ser usada en Educación a Distancia. Sapiens, 8(2), 67-81.

Míguez, Á. (2010). Características de los materiales curriculares escritos de matemática. Ponencia presentada en el VII Congreso Venezolano de Educación Matemática.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1998a). Informe para el docente 3º. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1998b). Informe para el docente 6º. Caracas: Autor.

Ministerio de Educación, Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (1999). Informe para el docente 9º.Caracas: Autor.

Mora, C.D. (1999). Presentación y reflexiones en torno al Tercer Estudio Internacional sobre Matemática y Ciencias (TIMSS). Segunda parte. Enseñanza de la Matemática, 8(2), 3-20.

Mora, C. D. (2002). Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana. Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la Universidad Central de Venezuela.

Mosquera, J. (2010a). “Matemática Moderna” y neocolonialismo en Venezuela. En J. Matos y W. Rodrigues (eds.), A reforma da Matemática Modernaem contextos Ibero-Americanos (pp. 103 – 136). Caparica, Portugal: Unidade de Investigação, Educação e Desenvolvimento.

Mosquera, J. (2010b). Un estudio de la representación de la diversidad en libros de textos para el sexto grado de educación básica. Trabajo no publicado. Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Mosquera J. (s.f.). Los materiales educativos impresos como objeto de estudio en Venezuela: El caso del Instituto Pedagógico Rural “El Mácaro”. Caracas: autor.

Paredes, H. (2014). La ideología en los libros de texto. Presentación oral en las Jornadas de Investigación y Extensión de la Facultad de Ciencias. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Peña-Mora, H. (1981). Características deseables en los libros de Matemática para la Educación Básica. En: Centro de Capacitación Docente “El Mácaro” (Comp.), Problemática de los materiales educativos impresos: Ideas para su diseño y producción en América Latina. Turmero, Aragua: Centro de Capacitación Docente “El Mácaro”.

Pinto, E. (2009). Tratamiento Didáctico dado a las Ecuaciones Lineales en los Libros de Texto de Matemática de Séptimo Grado: 1987-2007. Trabajo de Grado de Maestría. Instituto Pedagógico de Maracay, Maracay.

Qüenza, S. (1986). La Evaluación de los Materiales Educativos Impresos. Análisis crítico / Propuesta Metodológica/ Apéndice Documental. Turmero, Aragua: IPR El Mácaro.

Qüenza, S. y otros. (1985). El Libro de Texto en Venezuela. Análisis crítico. Turmero, Aragua: IPR El Mácaro.

Qüenza, S., Bracho, H., Tejada, L., Salazar, F. y Núñez J. (1972). Características deseables de los libros de matemática para la escuela primaria. Turmero, Aragua: IPR El Mácaro.

Ramírez, T. (2012). El texto escolar en Venezuela. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Réquiz, M. C., Mercado, P., Guzmán, E., Rodríguez, A. H. (1972). Investigación sobre libros de texto de Matemática y Ciencia para la Escuela Primaria. En: S. Qüenza, La evaluación de los materiales educativos impresos (pp. 243-261). Turmero: El Mácaro.

Serrano W. (2009). Las actividades matemáticas, el saber y los libros de texto: necesidad de una visión socio-cultural y crítica. La Paz: Fondo Editorial del IPASME-IIIE-GIDEM.

Serrano W. (2015). Los libros de texto de las editoriales privadas en Venezuela. Ponencia presentada en Un día con la Ciencia. Miranda: Instituto Pedagógico de Miranda.

Wladimir Serrano Gómez.

Doctor en Educación por la Universidad Central de Venezuela (UCV). Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática (UPEL, Instituto Pedagógico de Caracas) y Profesor de Matemática (UPEL). Actualmente es Profesor Asociado a Dedicación Exclusiva, adscrito al Departamento de Ciencias Naturales y Matemática del Instituto Pedagógico de Miranda. Ha laborado en la Escuela Primaria y en la Educación Media General, en especial, en el Liceo Agustín Aveledo (La Pastora, Caracas). Y ha sido profesor invitado en la Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática del Instituto Pedagógico de Caracas. Es miembro del Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática. Fue editor del *Boletín EM* de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT), Región Capital y presidente del mismo capítulo. Es parte del Programa de Estímulo a la Investigación e Innovación, acreditado como *Investigador C*.

Aportes del enfoque ontosemiótico a la educación matemática en Venezuela

Mario José Arrieche Alvarado

Aportes del enfoque ontosemiótico a la educación matemática en Venezuela

Introducción

La Educación Matemática en Venezuela se encuentra en pleno proceso de desarrollo y de consolidación como disciplina científica, el cual ha sido impulsado por la conformación de Asociaciones, tanto a nivel regional como nacional, integradas por todos los profesionales que laboran en la enseñanza de la Matemática de los diferentes niveles del Sistema Educativo y que se encargan de organizar, coordinar y realizar Simposios, Congresos, Jornadas y toda clase de eventos correspondientes a esta disciplina; constituyéndose estos últimos en escenarios propicios para divulgar y valorar la producción científica generada de los grupos de investigación que coordinan las líneas de investigación que conforman los núcleos y centros de investigación existentes en nuestro país, citándose por ejemplo las líneas dirigidas por Arrieche (2003), Ortiz (2003), González (2003) y Rojas (2003)adscritas al Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" (NIEM) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, sede Maracay. Este capítulo tiene como propósito fundamental dar a conocer a la comunidad de educadores matemáticos venezolanos y de Iberoamérica en general los productos investigativos que se han generado hasta el momento, y los que actualmente están en desarrollo, realizados bajo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003);enfoque, en cuyos fundamentos teóricos se sustenta la Línea de Investigación "*Perspectivas del Enfoque Semiótico Antropológico para la Didáctica de la Matemática*", y que actualmente se conoce con el nombre del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, registrada en la Coordinación General de Investigación de la UPEL-Maracay, y propuesta por Arrieche (2003). El trabajo se realizó tomando como base la descripción de la línea de investigación en referencia y sus productos investigativos.

Cabe destacar que entre los aportes a la Educación Matemática enfatizaremos más los aportes dados a los postgrados, existentes en el país, relacionados con la Educación Matemática en cuanto a trabajos de grado de especialización, maestría y tesis doctorales. La estructura utilizada es la siguiente: Descripción de la línea de investigación: Perspectivas del Enfoque Semiótico Antropológico para la Didáctica de la Matemática (LIPESA), objetivos generales de la línea y productos investigativos de la línea de investigación.

Descripción de la línea de investigación: perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática (LIPESA)

La línea de investigación LIPESA que proponemos se centra en el área de conocimiento Didáctica de la Matemática, considerada ésta como el campo más general de la Educación Matemática, y una de sus principales finalidades es identificar y resolver los problemas que surgen en la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación de conocimientos matemáticos para optimizar los procesos correspondientes.

Consideramos que la investigación en Didáctica de la Matemática debe afrontar el problema del análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en toda su complejidad, situado en el seno de los sistemas didácticos. Aunque una investigación particular tenga que centrarse en aspectos específicos (análisis epistemológico y/o cognitivo de un concepto, o un reducido campo de problemas), no se debe perder de vista la perspectiva sistémica, y tratar de desarrollar modelos teóricos que articulen las facetas: epistemológica, cognitiva e instruccional.

La solución de problemas de investigación en Didáctica de la Matemática (y en cualquier otra área de conocimiento), con criterios de calidad científica, precisa realizar un trabajo sistemático y disciplinado que garantice la validez y fiabilidad de las afirmaciones pretendidas, es decir, debe estar guiada por una metodología adecuada de investigación y por instrumentos teóricos adaptados a las peculiaridades de la investigación requerida. En tal sentido, en esta línea de investigación se pretende analizar las relaciones entre teoría, problemas y métodos de investigación en Didáctica de la Matemática, particularizada en el caso del enfoque que Godino y Batanero (1994) denominan "semiótico-antropológico" en Didáctica de la Matemática en el que vienen trabajando desde 1993 en el seno del grupo de investigación "Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática" de la Universidad de Granada, España y que actualmente se conoce con el nombre de enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción Matemática (Godino, 2003; Godino, Contreras y Font, 2006).(Véase la página Web: http://www.ugr.es/local/jgodino/semioesp/indices.htm).

Con la expresión "enfoque semiótico-antropológico" se describe el modelo teórico para la Didáctica de la Matemática que adopta la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos del conocimiento matemático. No se trata de un modelo teórico acabado, sino de un sistema de nociones en proceso de elaboración y desarrollo cuya idea impulsora consiste en tratar de articular dentro de un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adoptando nociones semióticas como enfoque integrador.

Entre las nociones teóricas adoptadas que usaremos en el estudio de las tres dimensiones mencionadas, propuestas en este modelo para el análisis didáctico, están las de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (Godino y Batanero, 1994). Tales significados se conciben como los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) para resolver un campo de problemas matemáticos. En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa distinguir cuatro tipos de significado: de referencia, pretendido, implementado y evaluado (Godino, 2003).

Significado de referencia: Es lo que representa el objeto para las instituciones matemáticas y didácticas. Son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto matemático que se fija como objeto institucional y que es el producto de las orientaciones de los expertos y del análisis de los currículos.

Significado pretendido: Es el sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción.

Significado implementado: Es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tiene lugar en la clase de matemática, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

Significado institucional evaluado: Son las tareas o cuestiones que incluyen las pruebas de evaluación y pautas de observaciones de los aprendizajes.

En cuanto al significado personal (el del estudiante) es posible hablar de significado global, declarado y logrado (Godino, 2003).

Significado global: Es la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno para resolver un campo de problemas.

Significado declarado: Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo los aciertos y los desaciertos desde la perspectiva institucional.

Significado personal logrado: Se corresponde con las prácticas manifestadas y que son conformes con la pauta institucional establecida. El significado declarado en desacuerdo con el establecido institucionalmente es lo que usualmente se denominan *errores de aprendizaje.*

Los sistemas de prácticas que una institución considera apropiados para resolver un tipo de tareas son denominados por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) una *praxeología matemática*, noción que podemos asimilar con la que Godino y Batanero denominan "significado institucional de un objeto matemático". La interpretación de las praxeologías como significados de los objetos matemáticos (teorías, contenidos u organizaciones matemáticas) supone la adopción de una epistemología de tipo pragmatista y relativista (en consonancia con la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein). Estas entidades se conciben como sistemas formados por distintos elementos agrupables en dos categorías:

(a) Dimensión praxémica (praxis), formada por el campo de problemas, las técnicas (operaciones, procedimientos) y los elementos notacionales o lingüísticos puestos en juego.

(b) Dimensión discursiva (logos), formada por los conceptos, propiedades y argumentaciones que regulan, organizan y estructuran los componentes praxémicos.

La noción de praxeología nos proporciona una herramienta potente para analizar la variedad de significados atribuidos a un contenido matemático cualquiera. Para seleccionar los aspectos de dicho contenido viables en un nivel y contexto educativo es necesario disponer de las diversas posibilidades e identificar sus elementos constituyentes, así como tener en cuenta las relaciones ecológicas entre los objetos matemáticos involucrados (Godino, 1993).

Por otra parte, para describir y explicar los logros y dificultades de los estudiantes tenemos que analizar con suficiente detalle el proceso de estudio, los patrones de interacción docente-discente a lo largo del proceso, así como la trama compleja de objetos matemáticos y relaciones que constituyen el conocimiento pretendido. Con dicho fin las nociones de "praxeología didáctica" y "función semiótica" pueden ser herramientas conceptuales útiles.

La noción de *praxeología didáctica* (Chevallard, 1997) se corresponde con la de praxeología matemática, pero en este caso el componente praxémico se refiere a las tareas del profesor y del alumno, las técnicas de estudio, y de ayuda al estudio. Para el profesor, en el momento de la planificación de la enseñanza, se trata de diseñar una praxeología matemática viable y en el momento de realización de la instrucción se trata de decidir y aplicar las técnicas de ayuda al estudio mejor adaptadas.

Un aspecto integrante de la praxeología didáctica es la distribución en el tiempo de las diversas funciones docentes y discentes en conjunción con los distintos componentes de las praxeologías matemáticas. Se necesita describir el *diálogo* efectivamente ocurrido entre profesor y estudiante a propósito de cada componente del saber matemático, o prever posibles alternativas para tales diálogos e interacciones. Los distintos elementos que componen la praxeología matemática escolar deberán ser abordados por el docente y discente de acuerdo con patrones de interacción definidos distribuidos en el tiempo, lo que constituye una *trayectoria didáctica*.

Cabe destacar que la noción de *función semiótica* pretende tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se dice que se establece una función semiótica entre dos entidades (ostensivas o no ostensivas) cuando entre ambas se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, una de ellas se "pone en lugar de la otra", o una de ellas "es usada por la otra". Esta noción permite formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el conocimiento matemático y explicar en términos de *conflictos semióticos* las dificultades y errores de los estudiantes.

Por otra parte, en consonancia con el interaccionismo simbólico, el modelo teórico que se propone para la Didáctica de la Matemática,considera como objeto o entidad matemática "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas" (Godino, 2001, p.6). Para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se considera necesario explicitar los distintos tipos de objetos mediante los cuales describir la actividad matemática y los productos resultantes de la misma.

Asimismo, (Godino, 2001) propone los siguientes tipos de entidades:

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

(2) *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) *Acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) *Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función)

(5) *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional – se ponen en lugar de las restantes- y también instrumental, o sea deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

Las situación-problema matemáticas son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones (algoritmos, operaciones, procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin. Parece apropiado describir a estos dos componentes (situaciones-problemas y acciones) como *praxis* según propone Chevallard (1997).

Los otros tres componentes (conceptos-definiciones, proposiciones, argumentaciones) desempeñan un papel normativo en las matemáticas. Son el resultado de una actividad reflexiva y regulativa de la praxis; conjuntamente se pueden describir como los componentes teóricos o discursivos (*logos*).

Este agrupamiento de las entidades matemáticas en praxis y logos no quiere decir que entre dichos componentes no existan relaciones de interdependencia. El lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva tanto en la praxis como en el logos; el logos encuentra su razón de ser en la praxis y ésta se desarrolla y rige por el logos.

Las entidades matemáticas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2001): personal – institucional, ostensiva - no ostensiva, concreta – abstracta, elemental – sistémica, expresión – contenido.

En el EOS se define *trayectoria muestral* como la que describe la secuencia particular de cada función que ha tenido lugar en el tiempo y especifica seis de estas funciones (Godino, 2003):

Trayectoria epistémica es la distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementados. Estos componentes se refieren a problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos se van sucediendo en cierto orden en el proceso de instrucción.

Trayectoria docente es la distribución en el tiempo de instrucción de las funciones, tareas y acciones correspondientes al docente.

Trayectoria discente es la distribución de las funciones y acciones que desempeñan los estudiantes (una para cada estudiante).

Trayectoria mediacional representa la distribución de los recursos tecnológicos usados durante la instrucción, tales como: libros, apuntes, manipulativos, software, etc.

Trayectoria cognitiva es la *cronogénesis* de los significados personales de los estudiantes.

Trayectoria emocional es la distribución temporal de los estados emocionales, valores, afectos y sentimientos de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y el proceso seguido.

Cada una de estas trayectorias es una realización de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene característica no determinista. Estas trayectorias una vez implementadas, pueden ser valoradas en su *idoneidad*[1] *didáctica* mediante los criterios que presentan Godino, Contreras y Font (2006) y que seguidamente presentamos.

Idoneidad epistémica: Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, respecto a los significados de referencia.

Idoneidad cognitiva: Con ella se valora en qué medida los significados implementados están en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes (Vygostski, 1934), así también valora el grado de cercanía de los significados personales alcanzados por los estudiantes de acuerdo a los pretendidos o implementados.

Idoneidad interaccional: Valora el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten: a) Determinar posibles conflictos semióticos y b) resolver los conflictos que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, con la aplicación de la negociación de significados.

Idoneidad mediacional: Con este criterio se valora la disponibilidad y adecuación de recursos materiales y temporales fundamentales para el desarrollo del proceso de instrucción y cognición.

Idoneidad emocional: Este criterio sirve para valorar el interés y motivación del alumnado por el proceso de estudio y los objetos matemáticos puestos en juego.

[1] Según el diccionario de la RAE, idóneo, quiere decir adecuado y apropiado para algo. En este caso se refiere al grado en que un proceso de estudio matemático (o una parte del mismo) permite el logro de los fines pretendidos.

Idoneidad ecológica: El grado de adaptación que tiene el proceso de estudio al proyecto educativo de la universidad, las orientaciones curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Desde el punto vista metodológico, en las investigaciones desarrolladas dentro del enfoque semiótico-antropológico se deben combinar diversos métodos y técnicas según las distintas facetas de la investigación, dependiendo del problema abordado en las mismas. Al igual que cada problema (o campos de problemas) matemático requiere sus conceptos y técnicas específicas para su solución, se considera emplear en cada caso los enfoques y técnicas de recogida y análisis de datos pertinentes al problema didáctico planteado. En consecuencia, se debe combinar el estudio documental en la componente epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes experimentales, tanto cognitivas como instruccionales. En el estudio de la evolución de los significados personales de los estudiantes como consecuencia de un proceso instruccional se puede utilizar el método experimental y cuasi-experimental, donde el control de variables, el tamaño de las muestras y su representatividad deben conferir una gran potencia y fiabilidad a los resultados del análisis estadístico de los datos. Por otro lado, y puesto que este enfoque nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, se debe completar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, el estudio de casos nos permite mostrar la consistencia de los significados personales sobre los objetos puestos en juego. Asimismo, la observación y registro de los episodios instruccionales muestra la complejidad semiótica de los procesos elementales de estudio de las matemáticas.

La línea de investigación Perspectiva del Enfoque Semiótico-antropológico para la Didáctica de la Matemática (LIPESA) nos permite implementar un método denominado “análisis semiótico” (Arrieche, 2002) como herramienta para interpretar los significados de un objeto matemático, que puede aportar explicaciones para las dificultades de los procesos de estudio de dicho objeto basadas en la complejidad semiótica de las tareas demandadas y la negociación de tales significados. Este tipo de análisis puede ser útil para describir procesos de comunicación e interpretación del conocimiento matemático en el seno de los sistemas didácticos, así como identificar factores condicionantes de los mismos.

Objetivos generales de la línea:

Teniendo presente el Sistema de Referencia antes esbozado esta línea se propone impulsar estudios que permitan:

1) Caracterizar los distintos significados institucionales asociados a un contenido matemático e identificar criterios de diseño de praxeologías matemáticas en cualquiera de los contextos y niveles educativos existentes en el país (dimensión epistémica).

2) Caracterizar las distintas praxeologías didácticas relativas a los significados institucionales de pretendidos e identificar criterios de diseño y optimización de tales praxeologías en cualquiera de los contextos y niveles educativos existentes en el país (dimensión instruccional).

3) Caracterizar los significados personales de los estudiantes relativos a los distintos elementos de los significados institucionales implementados en cualquiera de los contextos y niveles educativos existentes en el país y su explicación en términos de los significados de referencia y las praxeologías didácticas puestas en juego en el proceso de estudio (dimensión cognitiva).

4) La utilización de la técnica de análisis semiótico para caracterizar los significados sistémicos (o praxeológicos) y elementales puestos en juego en el proceso de estudio de un tema matemático en cualquiera de los niveles educativos existentes en el país.

5) Evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos que conforman los programas de matemática en los niveles educativos existente del sistema educativo venezolano, mediante los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

6) Elaborar y difundir documentos de orientación para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

7) Contribuir al desarrollo teórico y metodológico del campo de la Educación Matemática con productos sólidos y reconocidos a nivel nacional e internacional.

Productos investigativos de la línea de investigación LIPESA

En este apartado haremos referencia a los trabajos de grado de especialización, maestría y tesis doctorales, concluidos y en proceso, insertados en la línea de investigación referida y desarrollados en el marco del enfoque ontosemiótico.

Trabajos concluidos - Año de culminación, Título. Tipo de Trabajo, Autor (Tutor)

2002

- La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Tesis doctoral, Mario Arrieche (Juan Díaz Godino).

2004

- Significados personales de las fracciones en estudiantes del primer año de ciencias en estudiantes del Liceo Nacional José Félix Ribas del Municipio Ribas. Proyecto de investigación de quinto año de educación secundaria, Mary Arrieche (Mario Arrieche)

2005

- El papel de la aritmética en la formación matemática de los estudiantes en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Marcos Mayma (Mario Arrieche).
- La resolución de problemas como herramienta de diagnóstico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en educación diversificada y profesional. Trabajo de grado de maestría, Thairo Figueroa (Mario Arrieche)
- Los vectores del plano en la formación matemática de los estudiantes de Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Silvia Briceño (Mario Arrieche).

2006

- Significados personales de los números enteros en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Ely Quintana (Mario Arrieche).

- EL uso de los sistemas dinámicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones del plano. Trabajo de grado de maestría, Lucía Díaz (Mario Arrieche).
- Significados institucionales de las funciones en Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Orlando Hernández (Mario Arrieche).
- Significados institucionales de la parábola. Trabajo de grado de maestría, Yovana Urdaneta (Mario Arrieche).
- Análisis de la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Yaleni Contreras (Mario Arrieche).

2007

- Análisis cognitivo y didáctico de los polinomios en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Jesús Álvarez (Mario Arrieche).
- Significados personales de las funciones en Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Jenny Romero (Mario Arrieche).
- Significados institucionales de las figuras planas en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Mary Carmen Navas (Mario Arrieche).
- Significados personales de los números naturales en Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Anihányela Benítez (Mario Arrieche).

2008

- Significados personales de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Ada Aponte (Mario Arrieche).
- La integral en la formación del técnico superior universitario. Dimensiones presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Tesis doctoral, Luis Capace (Mario Arrieche).
- Significados institucionales de geometría del triángulo en la formación inicial de profesores de matemática. Trabajo de ascenso, Belén Arrieche (Mario Arrieche).
- Significados personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática. Trabajo de grado de maestría, Angélica Martínez (Mario Arrieche).

- Significados personales del conjunto de los números naturales en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Lorena Carruido (Mario Arrieche).
- Significado institucional referencial de la factorización de polinomios en la Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Ángel Alcocer (Mario Arrieche).
- Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica. Trabajo de grado de maestría, Yaritza Pérez (Mario Arrieche).
- Significados de personales del límite de una función en la formación de profesores de química. Trabajo de grado de maestría, César García (Mario Arrieche).
- Criterio de la idoneidad epistémica de la función afín en Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Ángela Chiavorolli (Mario Arrieche).
- La hoja de cálculo electrónica y su idoneidad motivacional en el aprendizaje de la estadística. Trabajo de grado de maestría, Wendy Mendoza (Mario Arrieche).
- El proceso de instrucción estadística en docentes de educación integral mediante el criterio de la idoneidad mediacional. Trabajo de grado de maestría, Marlene Alvarenga (Mario Arrieche).

2009

- Transición del pensamiento aritmético al algebraico en séptimo grado de Educación Básica. Trabajo de grado de maestría, Heidi Castillo (Mario Arrieche).
- Significados institucionales de las fracciones en sexto grado de Educación Básica, Trabajo de grado de maestría, Anyela Florez (Mario Arrieche).

2010

- Significados personales de las funciones en la formación de Licenciados en Educación Matemática. Trabajo de grado de especialización, Leonard Sánchez (Mario Arrieche).

2012

- Significados institucionales de los Polinomios en segundo año de educación media general. Trabajo de grado de maestría, Dorenis Mota (Mario Arrieche).

2015

- Análisis semiótico y didáctico de un proceso de estudio sobre las razones trigonométricas. Trabajo de grado de maestría, Fernando Tesorero (Mario Arrieche).
- Evolución histórica del conjunto de los números naturales como aporte didáctico y epistemológico a la formación de profesores de matemática. Trabajo de grado de maestría, Mary Arrieche (Luis Capace).
- Significados institucionales de la ecuación de segundo grado en segundo año de educación media general. Trabajo de grado de maestría, Mary Núñez (Belén Arrieche).
- Volumen de cuerpos geométricos: análisis de un proceso de estudio mediante los criterios de idoneidad didáctica. Trabajo de grado de maestría, Yraima Ramos (Angélica Martínez).
- La circunferencia y el círculo en educación primaria. Una propuesta desde la idoneidad cognitiva, mediacional y ecológica. Trabajo de grado de maestría, Erica Valera (Angélica Martínez).

Trabajos en proceso - Año de inicio, Título. Tipo de Trabajo, Autor (Tutor)

2012

- Evaluación de un proceso de estudio sobre la integral de línea mediante los criterios de Idoneidad didáctica. Proyecto de Tesis doctoral, Hengleend Rincón (Mario Arrieche).

2013

- Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos puestos en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Proyecto FONACIT, Mario Arrieche (Mario Arrieche).
- Análisis de un proceso de estudio sobre las funciones mediante los criterios de Idoneidad didáctica. Trabajo de grado de maestría, Ana Peña (Mario Arrieche).

2015

- La idoneidad didáctica de la multiplicación en niños con dificultades de aprendizaje. Proyecto de Tesis doctoral, Elena Vásquez (Luis Capace).

- La función afín en la economía: Perspectivas semióticas de su enseñanza y aprendizaje. Proyecto de Tesis doctoral, Enedina Rodríguez (Luis Capace).
- La geometría en la formación inicial de profesores de educación integral. Proyecto de Tesis doctoral, Belén Arrieche (Martha Iglesias).

Referencias

Arrieche, M. (2002). La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Arrieche, M. (2003). Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la Didáctica de la Matemática. Paradigma, 24 (2), 151-160.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. Recherches en Didactique des Mathématiques, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, España: ICE/Horsori.

González, F. (2003). Educación Matemática. Comunicación presentada en la I Jornada de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática, Quadrante, 2(2), 69-79.

Godino, J. D. (2001). Un enfoque semiótico de la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J.D. (2003). Teoría de las funciones semióticas: enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Memoria presentada para optar a una plaza de catedrático en el Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26(1), 39-88.

Ortiz, J. (2003). Pensamiento numérico y algebraico. Paradigma, 25 (1), 125-139.

Rojas, J. (2003). Perspectivas de la Neurociencia en la Educación Matemática. Comunicación presentada en la I Jornada de Investigación en Educación Matemática de la UPEL-Maracay.

Mario Arrieche Alvarado.

Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, España. Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. Magister en Educación Superior, mención Matemática por la UPEL-Maracay. Profesor en la especialidad de Matemática por la UPEL-Maracay. Profesor Titular Jubilado de la UPEL-Maracay, adscrito al Departamento de Matemática. Fue Coordinador de la Maestría en Enseñanza de la Matemática y Coordinador General de Estudios de Postgrado de la UPEL-Maracay. Es un investigador reconocido por el Programa de Promoción al Investigador del Ministerio del Poder Popular de la Ciencia y Tecnología. Miembro de la Comisión Nacional fundadora del Doctorado en Educación Matemática de la UPEL. Conferencista, ponente, forista y tallerista en diversos eventos de Educación Matemática.

Alfabetización estadística del futuro profesor de matemática

Julia Elena Sanoja

Alfabetización estadística del futuro profesor de matemática

Educación estadística y el currículo

El conocimiento estadístico ha alcanzado una importancia en nuestros días, tanto como cultura básica, como en el trabajo profesional y en la investigación. Esto es debido a la abundancia de información con la que el ciudadano debe enfrentarse en su trabajo diario. La mayor parte de las veces estas informaciones vienen expresadas en forma de tablas o gráficos estadísticos. Un análisis del entorno es suficiente para darse cuenta que en casi todos los medios impresos y electrónicos existe información con datos estadísticos, gráficas y tablas, que hacen referencia a tendencias en el consumo de diferentes productos, a la distribución de la población, a las variaciones del precio de productos de la cesta básica y el uso de recursos naturales, entre otros. Por lo que un conocimiento básico de esta disciplina es necesario para la correcta interpretación de los mismos.

Tanur (1992) manifiesta que la Estadística está incorporada en las diferentes áreas del saber al verse involucrada en la solución de una variedad de problemas en los campos del quehacer humano, debido a que proporciona un lenguaje formal y común para comunicar los hallazgos científicos de diversas disciplinas, donde se describe explícitamente la incertidumbre inherente a los resultados de las investigaciones.

Es por estas razones, que existe la necesidad de que todos los ciudadanos posean los conocimientos básicos de una herramienta tan necesaria en la sociedad actual, que le sirva de medio para el entendimiento de esa gran variedad de información que se recibe a través de los medio de comunicación y además por ser un instrumento de análisis de información empleado para el propio trabajo del ciudadano que de una u otra forma, se enfrenta a series de datos o conjuntos de mediciones, a partir de las cuales desea obtener información válida y fiable para la toma de decisiones. Según Batanero (2000) esta información es necesaria para tomar decisiones acertadas de tipo económico, social y político.

Es así como, vemos que la Estadística ha sido incorporada en los curricula de matemática en la enseñanza primaria y secundaria y como un curso propio en las diferentes carreras universitarias. Batanero (2002), Garfield y Ahlgren (1998), León (1998) y Sanoja (2007), señalan que la Estadística está presente en forma generalizada en los diferentes niveles educativos debido a su carácter instrumental;

además por el valor en el desarrollo del pensamiento estadístico, en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de analizarla y tomar decisiones ante tanta incertidumbre. “No escapa a este hecho la educación venezolana, donde en todos los niveles del sector educativo se ha incluido la Estadística” (Sanoja, 2012, p. 6).

Todo esto indica que en el nivel universitario el estudiante, y en especial, un futuro profesor de Matemática, debe poseer una alfabetización estadística (Gal, 2002) que le permita la continuidad hacia su formación profesional, esta le provee un mínimo de capacidad y conocimiento estadístico para comprender su cotidianidad.

Alfabetización estadística

Partiendo de la conceptualización de alfabetización dada por la UNESCO, en función a los cambios sociales y a las necesidades personales actuales, como: “habilidad de identificar, comprender, interpretar, crear, comunicar y computar, usando materiales impresos y escritos en diversos contextos” (UNESCO, 2005, p. 21). Dentro del campo de la Educación Estadística son varios los autores que han intentado describir la naturaleza de la *Alfabetización Estadística* así como también constructos relacionados con ella, tales como conocimiento estadístico y pensamiento estadístico. Aunque no hay un consenso entre los distintos autores sobre las características y naturaleza de la alfabetización estadística.

Al respecto, Watson (1998) propone un marco teórico sobre *Alfabetización Estadística* en el que define un modelo que comprende tres componentes de sofisticación progresiva: el conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos, la comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo y una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística no suficiente.

Sin embargo, el término básico “*Alfabetización Estadística*” (en inglés “*statisticalliteracy*”) evoca imágenes de habilidades mínimas, pero la alfabetización estadística es, en muchos sentidos, más que esto. Según Ben-Zvi y Garfield (2004)

> estas habilidades incluyen el ser capaz de organizar datos, construir y mostrar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos. La alfabetización estadística también incluye la comprensión de conceptos,

> vocabulario y símbolos así como la comprensión de la probabilidad como medida de la incertidumbre (p.7).

Investigadores como Watson y Morritz (2000); Ben-Zvi y Garfield (2004), señalan que la alfabetización estadística es la capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que rodean nuestra vida diaria junto con la capacidad de apreciar la contribución que el pensamiento estadístico puede hacer en la toma de decisiones públicas y privadas, profesionales y personales. Gal (2002) sugiere que la alfabetización estadística requiere de "capacidad para interpretar y evaluar críticamente información Estadística, argumentos relacionados con datos, o fenómenos estocásticos" (p.2). Además la alfabetización estadística "requiere de la habilidad de discutir o comunicar las reacciones, interpretaciones u opiniones sobre las consecuencias de la información Estadística" (ob. Cit., p. 3).

Por su parte, Garfield, DelMas y Chance (2003) y Ben-Zvi y Garfield (2004) diferencian entre *Alfabetización Estadística*, *Razonamiento Estadístico* y *Pensamiento Estadístico*, identificando las siguientes características en cada uno de ellos.

La *Alfabetización Estadística* implica habilidades básicas e importantes que son usadas en la comprensión de información cotidiana y resultados de investigaciones, las cuales implican conocimientos relacionados con la organización, resumen y representación de datos; además de una comprensión básica de conceptos, vocabulario y símbolos estadísticos, y de la idea de probabilidad como medida de la incertidumbre.

Por otro lado, el *Razonamiento Estadístico* se define como la forma de darle sentido a la información estadística, lo cual involucra realizar interpretaciones basadas en un lote de datos o en sus representaciones y establecer relaciones entre conceptos (p.e., centro y dispersión), o combinar ideas sobre los datos y las probabilidades.

Por último, el *Pensamiento Estadístico*, involucra la comprensión de por qué y cómo se realizan las investigaciones y las "grandes ideas" implícitas en ellas. Estas ideas incluyen la naturaleza de la variación y, cuándo y cómo usar los métodos más apropiados de análisis de datos. Además, los autores indican que un pensador estadístico debería comprender la naturaleza del muestreo, de las inferencias y de cómo diseñar experimentos con el objetivo de establecer causas, además de saber cuándo y cómo se utilizan los modelos probabilísticos para simular fenómenos aleatorios y de cómo éstos sirven para estimar probabilidades.

En este orden de ideas, Gal (2004) propone un modelo, en donde se habla de los conocimientos básicos y otros procesos que deberían estar disponibles en las personas, para que ellos puedan comprender, interpretar, evaluar críticamente y reaccionar a los mensajes estadísticos encontrados en diferentes contextos. Este modelo asume que la *Alfabetización Estadística* involucra tanto un *componente de conocimiento* (compuesto de cinco elementos cognitivos: habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto y cuestiones críticas) como un componente disposicional (compuesto de dos elementos afectivos: postura crítica, creencias y actitudes).

En virtud de lo expuesto, y dado que el modelo de Gal se basa en los marcos teóricos delimitados por los autores mencionados antes, adoptamos esta última definición de *Alfabetización Estadística* con sus dos componentes y elementos constitutivos. Dichos componentes y elementos, no deberían considerarse como entidades separadas sino como contextos dependientes, como un conjunto dinámico de conocimiento, aptitudes y actitudes que juntos forman el *comportamiento estadísticamente alfabetizado.*

Cada una de las definiciones de estos autores sugieren que para tener alfabetización estadística uno debe ser capaz de leer, organizar, interpretar, evaluar críticamente y apreciar la información estadística presentada por los medios de comunicación. Por supuesto, la información estadística puede ser presentada de diferentes maneras, a través de gráficos o de tablas, por ende la alfabetización estadística también requiere la comprensión de estas vías para presentar la información.

De esta manera, se resume la *alfabetización estadística* como la capacidad de: (a) entender el lenguaje básico de la Estadística; (b) de aumentar la comprensión del "mundo" utilizando la Estadística; y (c) comprender las ideas fundamentales de la Estadística; por ende provee competencias para el desenvolvimiento en la vida profesional y cotidiana.

Estudio sobre conocimiento de contenido estadístico del profesorado: marco teórico adoptado y fundamentos

Errores en la lectura e interpretación de datos estadísticos

En Batanero (2000) se destaca la necesidad de que los alumnos adquieran destrezas en la lectura crítica de datos, ya que ésta es un componente básico para lograr la *alfabetización estadística* y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica.

Los gráficos estadísticos constituyen uno de los medios más empleados para la presentación y el análisis de la información estadística. Esto se debe al hecho de que las ideas presentadas gráficamente son entendidas con mayor rapidez y comodidad que las explicaciones numéricas y verbales. De ahí que, la comprensión de gráficos estadísticos es un componente fundamental en la alfabetización estadística.

En este sentido, autores como Bertin (1967), Curcio, (1987), Friel, Curcio y Bright (2001) y Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995) establecieron diferentes clasificaciones en niveles de comprensión de gráficos, pero entre esas clasificaciones la de Curcio (1987) y Friel, Curcio y Bright (2001) han tenido gran impacto en la Educación Estadística. En particular, Curcio (1987) estableció tres niveles de lectura de un gráfico:

- *Leer los datos*, requiere una acción local y específica, como la lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo, que atiende únicamente los hechos explícitamente representados.
- *Leer entre los datos*, cuando se es capaz de comparar e interpretar valores de los datos, integrar los datos de un gráfico, buscar relaciones entre las cantidades y aplicar procedimientos matemáticos simples a los datos; entendiendo tanto la estructura básica del gráfico como las relaciones contempladas en él.
- *Leer más allá de los datos*, cuando se es capaz de realizar extrapolaciones de datos, predecir e inferir a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico, requiere conocer el contexto en que los datos se presentan.

Curcio encontró que las principales dificultades aparecen en los dos niveles superiores (“leer entre los datos” y “leer más allá de los datos”). En este orden de ideas, Lee y Meletiou-Mavrotheris (2003) alertan sobre los errores en la lectura y comprensión de histogramas presentados en diferentes contextos de la vida real:

- Percepción de los histogramas como representación de datos aislados, suponiendo que cada rectángulo se refiere a una observación particular y no a un intervalo de valores.

- Tendencia a observar el eje vertical y comparar en las alturas de las barras cuando comparan la variación en dos histogramas.
- Interpretación determinista, sin apreciar que los datos representan un fenómeno aleatorio que podría variar al tomar diferentes muestras de la misma población.
- Tendencia a interpretar los histogramas como gráficos de dos variables (es decir, como diagrama de dispersión).

Metodología

Basándonos en la definición de alfabetización estadística y en las recomendaciones realizadas por Curcio (1987) y Ben-Zvi y Garfield (2004), llevamos a cabo una investigación de campo de tipo descriptiva dando respuesta al objetivo investigativo: *Analizar la alfabetización estadística de los futuros profesores de Matemática.* La población estuvo conformada por 115 futuros profesores de matemática, llamados de aquí en adelante “estudiantes”. Para alcanzar el objetivo elaboramos un cuestionario que es una modificación de los cuestionarios de Konold y Garfield (1993) y Sanoja (2012), ya que se tomaron y adaptaron preguntas pertinentes con los conceptos básicos de la Estadística, el mismo consta de 25 ítems, cuyas preguntas fueron diseñadas tomando en consideración los aspectos teóricos de la Estadística que están contemplados en los programas de Matemática del Currículo Nacional Bolivariano (C.N.B.), donde se desarrollan los aspectos de: organización de datos, medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda, probabilidad, orientadas a obtener información sobre las habilidades de alfabetización del profesorado; dicho instrumento fue validado por medio de la técnica de Validez de Contenido, a través del procedimiento de juicio de expertos.

Discusión de resultados

A continuación realizaremos la discusión sobre algunos de los elementos de significado que han utilizado los estudiantes para resolver cada una de las preguntas. No realizamos el análisis de todos los elementos por cuestiones de espacio y extensión, por ello sólo seleccionamos aquellos que nos parecían importantes a la hora de analizar cómo los estudiantes leen e interpretan la información estadística.

Conocimiento sobre las representaciones gráficas

Pregunta 12

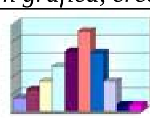
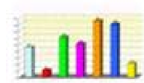
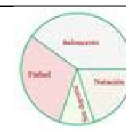
En esta pregunta (Cuadro 1) se le pide identificar la representación gráfica que corresponde con el tipo de variable, con la intención de ver si tienen la capacidad de asociar un histograma con variables cuantitativas continuas.

Cuadro 1. Frecuencia de respuestas de pregunta 12

Se presenta la edad de 32 niños en la siguiente tabla de frecuencias

Edad	*Cantidad de niños*
6 - 8	*5*
8 - 10	*11*
10 - 12	*7*
12 - 14	*9*

¿Qué representación gráfica, crees que sería la apropiada para estos datos?

	 **A. Histograma**	 **B.** Gráfico de tendencias	 **C.** Gráfico de barras	 **D.** Gráfico de sectores
TOTAL	***101(87,83%)***	**0**	**14(12,17%)**	0

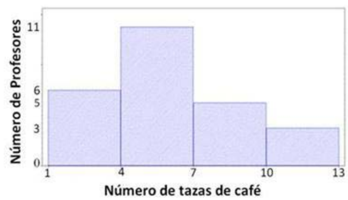
Aun cuando, los resultados dan indicios de que el 87,83 % de los estudiantes muestran tener la capacidad de identificar el tipo de representación gráfica para una variable numérica. Sin embargo, preocupa la presencia de una concepción errónea (12,17 %) en los estudiantes al seleccionar el gráfico de barras, esto refleja que no tienen conceptos claros en cuanto al tipo de variable y su representación gráfica. Al respecto, Jacobbe (2007) y Lee y Meletiou-Mavrotheris (2003) consideran la identificación de la representación gráfica según la variable una tarea procedimental de bajo nivel, identificando error en la lectura y comprensión de histograma al percibir los histogramas "como representación de datos aislados" y no como la representación de intervalos de valores.

Pregunta 19

En esta pregunta (Cuadro 2) los estudiantes deben poner en juego la capacidad de extraer, combinar y realizar cálculos con los datos de un histograma, situación ésta que se evidencia cuando 73,91 % de los estudiantes responde correctamente con la opción "*8 personas consumen de 7 o más tazas de café*". Este grupo de estudiantesse ubican en el segundo nivel de comprensión lectora de gráficos que Curcio (1987) denominó *leer entre los datos* del gráfico.

Cuadro 2. Frecuencia de respuestas de pregunta 19

La gráfica muestra las tazas de café que consumen los futuros profesores de matemática al día.



¿Qué puedes concluir del histograma?

	A. Hay 11 personas que consumen de 1 a 7 tazas de café	**B.** ***8 personas consumen de 7 o más tazas de café***	**C.** 16 personas consumen de 1 a 10 tazas de café	**D.** 6 personan no toman café
TOTAL	**23(20%)**	***85(73,91%)***	**7(6,09%)**	**0**

Sin embargo, 26,09 % de los estudiantesde no logran poner en juego la capacidad de leer, integrar e interpretar los datos del histograma.

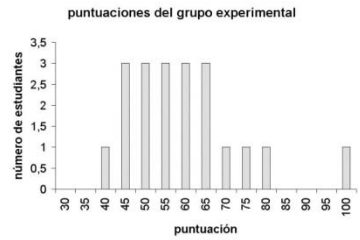
Pregunta 24

En esta pregunta (Cuadro 3) se estudia la capacidad de estimar un valor central (promedio) a partir de la representación gráfica, para comparar dos distribuciones de frecuencias (puntuaciones en un examen), con valores atípicos.

Un bajo porcentaje de los estudiantes (12,17 %) respondieron correctamente, demostrando su capacidad de leer e interpretar una representación gráfica y cómo a través de ella identifican conceptos asociados y comparan muestras.

Cuadro 3. Frecuencias de las respuestas de pregunta 25

Cuarenta futuros profesores de matemática participaron en un estudio sobre el efecto del sueño sobre las puntuaciones en los exámenes. Veinte de los futuros profesores de matemática estuvieron voluntariamente despiertos toda la noche anterior al examen (grupo experimental). Los otros veinte futuros profesores de matemática (grupo control) se costaron a las 11 de la noche anterior al



examen. Las puntuaciones en el examen se muestran en los gráficos siguientes. Cada punto representa la puntuación de un estudiante en particular.

Observa los dos gráficos. Luego escoge entre las 6 posibles conclusiones que se indican a continuación, aquella con la que estés más de acuerdo.

alternativa	**Frecuencia**	**%**
a. El grupo experimental lo hizo mejor porque ninguno de estos futuros profesores de matemática puntuó por debajo de 40 y la máxima puntuación fue obtenida por un estudiante de este grupo	10	8,70
b. El grupo experimental lo hizo mejor porque su promedio parece ser un poco más alto que el promedio del grupo control.	19	16,52
c. No hay diferencia entre los dos grupos, porque hay solapamiento considerable en las puntuaciones de los dos grupos.	12	10,43
d. No hay diferencia entre los dos grupos, porque la diferencia entre sus promedios es pequeña, comparada con la cantidad de variación de sus puntuaciones.	25	21,74
e. El grupo control lo hizo mejor porque hubo en ese grupo más futuros profesores de matemática que puntuaron 80 o por encima.	14	12,17
f. El grupo control lo hizo mejor, porque su promedio parece ser un poco mayor que el promedio del grupo experimental	***14***	***12,17***
g. No contestó	21	18,26

Sin embargo, se ve con preocupación cómo 87,83 % de los estudiantesresponden de manera incorrecta o no contesta, lo cual pone en evidencia que no poseen los conocimientos necesarios para la lectura e interpretación de una representación gráfica y los conceptos asociados a esta; esto es que les permita estimar con bastante aproximación el valor promedio. Esto indica que no tienen un dominio del nivel que Curcio (1987) denominó *Leer más allá de los datos*, por no ser capaces de realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Conocimiento sobre las medidas de tendencia central

Pregunta 13

En esta pregunta (Cuadro 4) para dar respuesta a este problema, los estudiantes deben aplicar el procedimiento para determinar la mediana.

Cuadro 4. Presentación de pregunta 13, con la frecuencia de respuestas

En la escuela hay entre 3° y 4° grado siete secciones. El número de niños que, en cada sección, le agrada la música clásica es el siguiente: 8, 12, 9, 2, 14, 5, 3

¿Cuál es la mediana del número de niños que les agrada la música?

	A. 14	**B.** *8*	**C.** 2	**D.** 9
RESPUESTAS	**0**	***51(44,35%)***	**64(55,65%)**	**0**

Se ve con preocupación cómo el 55,65% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta, esto indica que realizaron una lectura directa de los datos del problema tal como se muestra en el enunciado sin considerar la idea de centro de la distribución, cometiendo el error de no ordenar los datos; resultado similar al reportado por Carvalho (2001) que refleja una dificultad procedimental por no comprender el concepto de mediana. Igualmente Jacobbe (2007) reportó que los profesores que participaron en su investigación poseían un bajo conocimiento procedimental de la mediana.

Pregunta 14

En esta pregunta (Cuadro 5) deben mostrar un dominio procedimental de las medidas de tendencia central. El 64,35% de los estudiantes respondieron de una manera correcta al seleccionar la opción B, muestran tener un conocimiento procedimental para determinar los valores de: moda, media y mediana, donde tomaron en consideración la necesidad de ordenar los datos, la idea de centro de la distribución.

Cuadro 5. Presentación de pregunta 14, con la frecuencia de respuestas

Cuál de los siguientes conjuntos de datos tiene: una media de 4, moda de 7 y mediana de 3.

	A. 2, 7, 3, 7, 2	**B.** ***7, 3, 2, 7, 1***	**C.** 8, 7, 5, 1, 8	**D.** 6, 2, 5, 8, 6
TOTAL	41(35,65%)	***74(64,35%)***	**0**	**0**

Sin embargo, un 35,65% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta, lo que indica que no poseen un conocimiento procedimental para determinar las medidas de tendencia central. Obvian la presencia e importancia que tiene la media aritmética en la distribución de los datos al dar la respuesta sustentada únicamente en la moda y en una incorrecta determinación de la mediana, por no considerar el orden de los datos para su determinación; o también podríamos pensar que los futuros profesores de matemática se apresuraron en dar la respuesta, puesto que son opciones muy parecidas. También pudiera ser que simplemente utilicen el ensayo y error, tal como lo expresa Cai (1995).

Pregunta 21

Esta pregunta (Cuadro 6) hace referencia al uso de la media como mejor promedio de una variable a partir de diversas mediciones de ella, debido a la presencia de errores. También permite descubrir si el estudiante detecta la presencia de los valores atípicos en el cálculo de la media.

Se aprecia que sólo 20,87% de los estudiantes responden correctamente, al reconocer la media como solución al problema y percibir la existencia de un valor atípico en el conjunto dado de datos y su influencia en el cálculo de la media aritmética. En el contexto dado, el valor 15,3 es claramente un valor atípico, porque los errores de medida de tal magnitud son muy raros.

Cuadro 6. Frecuencia de las respuestas de pregunta 21

Nueve futuros profesores de matemática pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6,2	6,0	6,0	15,3	6,1
6,3	6,23	6,15	6,2	

Los futuros profesores de matemática quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendaría usar?

Alternativa	Frecuencia	%
a. Usar el número más común, que es 6,2	16	13,91
b. Usar 6,15, puesto que es el peso más preciso	14	12,17
c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9	49	42,60
d. Eliminar el valor 15,3 y sumar los otros 8 números y dividir la suma por 8	***24***	***20,87***
e. No contestó	12	10,45

Por otra parte, el 68,68% (sumando alternativas, *a,b* y *c*) de los estudiantes respondieron incorrectamente. De los cuales un 42,60 % (opción *c*) reconocen la media como solución al problema pero no consideran la existencia de un valor atípico, así como se aprecia que un 13,91% eligen la opción *a*, en esta respuesta también hay implícito el no reconocimiento de la media como solución al problema dado. Aquí los estudiantes no están reconociendo el contexto del problema, aspecto éste que se debe considerar en la comprensión del concepto de media aritmética, tal como afirma Batanero (2000) la comprensión de un concepto no puede estar sujeta únicamente a la definición y propiedades sino también a todos los procedimientos relacionados con el concepto asociado a una capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones a problemas.

Pregunta 23

En esta pregunta (Cuadro 7) se valora la comprensión de las medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda, así como los efectos del contexto y de un valor cero en el cálculo de la media. En este sentido, vemos como el 41,74 % de los estudiantes respondieron de manera correcta, indicando esto que comprenden las medidas de tendencia central y además consideran el contexto donde se realizan las observaciones. Es de hacer notar que en este caso parecería contradictorio tomar los ocho valores para el cálculo de la media, pero hay que considerar el contexto dado de la situación problema, el factor humano y sus relaciones al tratarse de mediciones realizadas sobre la actuación de los niños.

Cuadro 7. Frecuencias de las respuestas de la pregunta 23

Una profesora quiere cambiar la colocación de sus alumnos en clase, con la esperanza de que ello incremente el número de preguntas que hacen. En primer lugar, decide ver cuántas preguntas hacen los futuros profesores de matemática con la colocación actual. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 futuros profesores de matemática durante la clase se muestra a continuación:

	Iniciales del alumno							
	A.A.	R.F	A.G	J.G.	C.K.	N.K.	J.L.	A.W.
Número de preguntas	0	5	3	15	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día ¿Cuál de los siguientes métodos la recomendarías que usara?

alternativa	Frecuencia	%
a. Usar el número más común, que es el 2.	29	25,22
b. Sumar los 8 números y dividir la suma por 8.	***48***	***41,74***
c. Eliminar el 15, sumar los otros 7 números y dividir la suma por 7.	*6*	*5,22*
d. Eliminar el 0, sumar los otros 7 números y dividir la suma por 7.	19	16,52
e. No contestó	13	11,30

Por otra parte, un 46,96% de los estudiantes contestaron de manera incorrecta, entre los cuales un grupo (5,22%) no comprende el problema planteado al considerar el 15 como un valor atípico, así como vemos otro grupo (16,52%) que considera que el cero no expresa nada, obviamente ambos grupos no consideran el contexto del problema. También se ve con preocupación que un 11,30% de los estudiantes no fueron capaces de dar respuesta a la situación planteada, lo que indica que no hay un dominio conceptual de las medidas de tendencia central.

Estos dos grupos (46,96% y 11,30%) no reconocen el contexto del problema donde deben aplicar el concepto de media aritmética y además de no comprender las propiedades del mismo.

Conclusiones del estudio

Al respecto Hulsizer y Woolf (2009) plantean que los estudiantes deben estar conscientes que requieren de un dominio de los conceptos fundamentales de Estadística, conocimientos básicos e importantes para la cultura estadística, que pueden ser usados en la comprensión de la información estadística. Dichos autores señalan "es importante que los futuros profesores de matemática desarrollen una comprensión de los conceptos estadísticos, ellos son los responsables de incentivar el desarrollo el pensamiento estadístico en el estudiante y fomentar una cultura estadística" (ob. Cit., p. 67).

Las tablas de frecuencias y los gráficos estadísticos son herramientas necesarias y de gran utilidad para comunicar de manera sencilla y organizada la información, permiten y facilitan la comprensión de la realidad. Dentro de esta perspectiva, Hulsizer y Woolf (2009) señalan que "las tablas y gráficas son herramientas potentes debido a que permiten transmitir y presentar información, hacen comprensibles los hechos" (p.106).

Representaciones gráficas, su identificación, lectura e interpretación; los resultados permiten indicar que los estudiantes presentan dificultad de asociar las gráficas estadísticas con el tipo de variable, esto podría estar indicando poco dominio de los conceptos estadísticos vinculados con las gráficas estadísticas, específicamente en lo referido a asociar el histograma con los datos a analizar.

En cuanto a lectura de gráficos:

- tienen la capacidad de *leer literalmente* los gráficos de barras y de líneas, a lo que Curcio (1987) denomina *leer los datos*, sugiriendo esto un dominio de conocimiento procedimental, realizan una acción local.
- son capaces de utilizar la información presente en gráficos de barras y de línea para combinar, integrar y/o comparar los datos y así poder dar respuesta a preguntas concretas, a lo que Curcio (1987) denomina *leer entre los datos*.
- el histograma pareciera ser un gráfico difícil de comprender, al no poder leer literalmente ni interpretar los datos del gráfico, en este sentido podría ser que los futuros profesores de matemática no posean el conocimiento

procedimental para comprender el histograma, no logran ni *leer los datos,* ni *leer entre los datos* (Curcio, 1987).

- Presentan dificultad al tratar de hacer inferencias partiendo de representaciones gráficas. No alcanzan el tercer nivel de lectura de gráficos que establece Curcio (1987), *leer más allá de los datos.*

Se podría presumir que la razón por la cual a los estudiantes se les facilita el trabajar con gráficos de barras y no así con histograma, es porque los gráficos de barras son de uso más frecuente en la cotidianidad del estudiante. Para Carrión y Espinel (2005) el gráfico de barras es un tipo de gráfico conocido, tradicionalmente estudiado desde la escuela y se convierte en un gráfico familiar.

Las medidas de tendencia central, uno de los conceptos necesarios para que el estudiante pueda conocer, entender y comprender su entorno, le dan desenvolvimiento en su vida cotidiana. En esta perspectiva Batanero, Godino y Navas (1997) señalan que "además de ser conceptos estadísticos básicos, los promedios son imprescindibles en el análisis exploratorio de datos, cuya enseñanza se recomienda en los nuevos currículos de primaria y secundaria". (p. 1)

Media aritmética: Los estudiantes reflejan concepciones que indican un razonamiento adecuado acerca de lo que es media, al asociarlo como valor representativo de la distribución, por ser aquel valor que representa aspectos del conjunto de datos como un todo.

Sin embargo no deja de ser preocupante como emerge una concepción algorítmica de la media aritmética, se matematiza el concepto al centrarse en su procedimiento en lugar de la comprensión de su significado, siendo un razonamiento donde el concepto de media aritmética pierde su sentido y valor. Este es un razonamiento que es muy típico y es en su mayoría el enfoque que los estudiantes le atribuyen a la media aritmética.

Así como también, se les dificulta comprender el concepto de media aritmética en presencia de errores (valores atípicos) y su relación al contexto de la situación problema. Además de no considerar los valores nulos (cero) como parte de los datos, al momento de realizar el cálculo de la media aritmética.

Mediana: Emerge una concepción de la mediana haciendo alusión principalmente a un valor central de un conjunto de datos, donde no hay un razonamiento adecuado, al no considerar el orden en los datos; lo cual se corrobora cuando en situaciones problema presentan la dificultad en el cálculo de la mediana. Esto refleja que los estudiantes tienen poco dominio del concepto o no comprenden el concepto de mediana, al reflejar una concepción incompleta del mismo.

Moda: Los estudiantes presentan un dominio del concepto, donde hacen referencia al valor de máxima frecuencia.

En términos generales, aquellas actividades que requieren de relaciones complejas, en las que intervienen elementos de alfabetización y del razonamiento estadístico son más difíciles de resolver.

Por otra parte, los estudiantes reflejaron no tener un dominio completo de los conceptos básicos de estadística. Por lo tanto, no disponen de un conocimiento instrumental de la estadística, necesario para su aplicación en la práctica, poseen ideas incorrectas de los conceptos básicos de estadística, reflejado en los errores conceptuales identificados.

En este orden de ideas, también se aprecia la aplicación incorrecta de las propiedades de las medidas de tendencia central, no aprecian el efecto de un valor atípico en el cálculo de la media y no son capaces de discernir cuando un valor es atípico para un contexto dado, no hay dominio en la interpretación de una gráfica y su asociación con el concepto de media aritmética, no asocian la idea de centro de distribución con la mediana.

Se ha puesto de manifiesto la dificultad de los estudiantes en cuanto a la lectura, interpretación y toma de decisiones a la hora de seleccionar la información adecuada de una representación gráfica.

Referencias

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la Educación estadística? Blaix, 15,2-13.

Batanero, C. (2002). Los Retos de la Cultura Estadística.[Documento en línea]. Conferencia inaugural dictada en las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Disponible: http://www.ugr.es/~batanero/ ARTICULOS/CULTURA.PDF. [Consulta: 2012, Octubre 15].

Batanero, Godino y Navas (1997). Some misconceptions about averages in prospective primary teachers. En E. Pehknonen (Ed.), Proceedings of the 21st PME Conference (v.1, pp. 276). University of Lahti, Finlandia.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bertin, J. (1967). Semiologiegraphique. Paris: Gauthier-Villars. Disponible: Google Books. [Consulta: 2011, marzo 19]

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.), Proceedings of the 19th PME Conference (v.3, pp. 144-151).Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Carrión, J. y Espinel, M. (2005). Gráficas estadísticas: comprensión gráfica e implicaciones en la enseñanza.Formación del profesorado e investigación en educación matemática, 7, 183-196.

Carvalho, C. (2001). Interacção entre pares: contributos para a promoção do Desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7o. Ano de escolaridade. Tesis de Doctorado. Lisboa: APM.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 382–393.

Friel, S.; Curcio, F. y Bright, G. (2001).Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instruccional implications. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: meanings, components, responsabilities. International Statistical Review, 70, 1-51

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 47 – 78).

Garfield, DelMas y Chance (2003). The Web based ARTIST: Assessment Resource for improving Statistical Thinking. En: Assessment on Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality of AERA Annual Meeting, Chicago.

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1998). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistic: implications for research. Journal for Research in Mathematics Education, 19(1), 44-63.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. Learning and Instruction 5, 70-100.

Hulsizer, M. y Woolf, L. (2009).A guide to teaching Statistics. Innovations and best practices. Massachusetts, USA: Wiley-Blackwell.

Jacobbe, T. (2007) Elementary school teachers´ understanding of essential topics in statistics and the influence of assessment instruments and a reform curriculum upon their understanding.[Documento en línea].Tesis doctoral no publicada, Clemson University, South Carolina, USA Disponible: http://www.stat.auckland .ac.nz/~iase/publications/dissertations/dissertations.php[Consulta: 2010, Julio 10].

Konold, C. y Garfield, J. (1993). Statistical Reasoning Assessment, Part 1: Intuitive Thinking. Massachusetts: University of Massachusetts.

Lee, C. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2003).Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education. Disponible: http:// www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf [Consulta: 2012, Febrero 27]

León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. Revista Paradigma. [Revista en línea] Disponible: http://www.revistaparadigma.org.ve/Doc/Paradigma982/Art7.htm [Consulta: 2007, marzo 17]

Sanoja, J. (2007). Análisis de las actitudes hacia la Estadística en los futuros profesores de matemática de educación integral. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Sanoja, J. (2012). La enseñanza de la Estadística en la escuela primaria. Un estudio desde los futuros profesores de matemática. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Tanur, J. (1992). La Estadística una guía de lo desconocido. Madrid: Alianza editorial.

UNESCO (2005).Mathematics and democracy: The Case for Quantitative Literacy. Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Watson, J. M. (1998). Professional development for teachers of probability and statistics: Into an era of technology. International Statistical Review, 66, 271-289.

Watson, J. M., y Moritz, J. B. (2000). Development of understanding of sampling for statistical literacy. Journal of Mathematical Behavior, 19, 109-136.

Julia Elena Sanoja.

Doctora en Educación por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Tesis doctoral en "Educación Estadística en la Escuela Primaria". Ingeniera Industrial egresada de la Universidad de Carabobo (UC), con Maestría en Estadística por la Universidad Central de Venezuela (UCV). Tiene más de 15 años en docencia e investigación en el área de la Didáctica de la Estadística. Es Profesora Asociada de la UPEL Maracay, en Probabilidad y Estadística. Coordinadora de la Línea de Investigación Educación Estadística", adscrita al CEINEM-NT, se desempeña como Jefe de cátedra del Área de Matemática Aplicada. Es autora de artículos científicos y libros en el área de Didáctica de la Estadística. Ponente en diversos eventos nacionales e internacionales en el área de Educación Matemática.

La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría

Martha Iglesias Inojosa y
José Ortiz Buitrago

La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría

Introducción

En 1994, se publicó el documento de discusión para un estudio ICMI denominado Perspectivas sobre la Enseñanza de la Geometría para el siglo XXI (Mammana y Villani, 1994); en dicho documento se plantearon ciertas preguntas clave, relacionadas con: las razones que justifican su enseñanza, los fines que se persiguen, los contenidos a ser estudiados, las estrategias, materiales y recursos didácticos, la evaluación de los aprendizajes, la formación docente y la innovación educativa.

Seguidamente, en la Conferencia de Catania (Italia), se procedió a trabajar en la edición de la correspondiente publicación (Mammana y Villani, 1998), en la cual se trataron, entre otros, asuntos sobre la evolución histórica de la Geometría y su relación con el mundo real, el razonamiento geométrico, la Geometría en los currículos de Matemática, el uso de los software de Geometría Dinámica y la formación docente. Sin lugar a dudas, este estudio ICMI ha guiado la investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría durante la primera década del Siglo XXI.

En este orden de ideas, Iglesias (2007) abordó la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, con énfasis en asuntos cognitivos y didácticos, tales como: (a) la acepción del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele como soporte conceptual y metodológico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría; (b) el uso de los llamados software de Geometría Dinámica (SGD) en las clases de Matemática, (c) la demostración en Geometría, y (d) el diseño y desarrollo de unidades didácticas con contenidos geométricos.

Por lo antes mencionado, este capítulo tiene como propósito mostrar los aportes teóricos de la investigación en y sobre Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, teniendo como referencia la revisión de la literatura especializada, así como los hallazgos de las investigaciones realizadas desde el Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay), Venezuela.

El Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele

En el ámbito de las investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele ha sido aceptado como soporte conceptual de estas investigaciones (Usiskin, 1982; Jaime, 1998; De Villiers, 2010; Sarasua, Ruiz de Gauna y Arrieta, 2013). Al respecto, Gutiérrez y Jaime (2012), al reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, expresan que "el modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes" (p. 56).

Cabe señalar que estas investigaciones han estado básicamente dirigidas a: (a) Diagnosticar el nivel de razonamiento geométrico alcanzado por los estudiantes antes o después del estudio de un cierto tema geométrico (Usiskin, 1982; Jaime, 1993, Sarasua, Ruiz y Arrieta, 2013); (b) Diseñar y desarrollar una unidad didáctica con contenidos geométricos (Jaime y Gutiérrez, 1990); y (c) Analizar los conocimientos y las habilidades geométricas que los estudiantes ponen en práctica cuando realizan tareas que involucran contenidos geométricos (Jaime, 1993).

Por ello, en el marco de la línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, adscrita al CEINEM – NT, se han venido ejecutando proyectos de investigación que asumen entre sus referentes teóricos el modelo de Van Hiele y que han permitido identificar los conocimientos y habilidades geométricas puestas en práctica por estudiantes de educación media antes o después del estudio de ciertos temas como triángulos (Sánchez, 2008), círculo y circunferencia (Pérez, 2008), transformaciones en el plano (Moreno, 2006) y teorema de Pitágoras (Linares, 2008), así como diseñar y ejecutar unidades didácticas organizadas en torno a las fases de aprendizaje propuestas en este modelo. También se han realizado trabajos en el ámbito de la formación docente en Geometría y su Didáctica, como los desarrollados por García (2009), Pérez (2010), Galvis (2010), Báez (2010) y Sánchez e Iglesias (2012). Asimismo, el modelo ha permitido analizar las actividades propuestas en los libros de texto más usados por los maestros de 4º, 5º y 6º grado de educación primaria en relación con la Geometría de los Cuadriláteros (Aguilar e Iglesias, 2013).

Por otra parte, la realización del análisis didáctico de contenidos geométricos como soporte del diseño de unidades didácticas para la educación media, se ha visto favorecido por la aplicación del modelo de Van Hiele, con énfasis en el análisis cognitivo (niveles de razonamiento geométrico) y el análisis de la instrucción (fases de aprendizaje), según lo reportan Báez, González, Gudiño, Noguera e Iglesias (2013), Osorio, Gil, Gómez, Romero e Iglesias (2013) y Ramírez, Torres, Váldez e Iglesias (2013).

El modelo de Van Hiele (1957; 1959), establece que, en el aprendizaje de la Geometría, los estudiantes avanzan a través de una sucesión de cinco niveles de razonamiento, los cuales se describen en el Cuadro 1.

Cuadro1
Descripción de los niveles de razonamiento geométrico

Niveles	Descripción
Reconocimiento	El estudiante reconoce las figuras geométricas por su apariencia y de forma global; es decir, sin llegar a identificar sus partes componentes. En este nivel, el estudiante ignora ciertas características pertinentes de la figura, mientras enfatiza algunas características no pertinentes como lo puede ser la posición ocupada por una figura en un plano. Así, un cuadrado mostrado con los lados paralelos a los bordes del pizarrón deja de ser reconocido como tal si es cambiado de posición.
Análisis	El estudiante analiza las partes componentes de una figura geométrica tales como lados y ángulos internos. Así, pues, descubre, en forma experimental, relaciones entre las partes componentes de una figura o entre objetos geométricos; reconoce las características relevantes de una figura y las diferencia de las características irrelevantes; sabe que cambiar una figura de posición a otra no afecta a sus atributos relevantes; no acepta que una figura puede pertenecer a varias clases generales y tenga varios nombres; no puede establecer relaciones mediante deducciones lógicas, ni hacer demostraciones formales.
Relaciones, clasificación u ordenamiento	El estudiante establece relaciones lógicas y sigue razonamientos deductivos sencillos, a partir de las propiedades descubiertas en el nivel 2. Sin embargo, en este nivel, el estudiante aún no comprende el funcionamiento de los sistemas axiomáticos en la validación del conocimiento geométrico.
Deducción	El estudiante que razone a este nivel entiende el significado de los axiomas o postulados y es capaz de seguir y realizar razonamientos deductivos y demostraciones formales de los teoremas.
Comparación de Sistemas Axiomáticos o Rigor Lógico	En este nivel, el estudio de la Geometría es elevadamente abstracto y no incluye necesariamente el estudio de modelos concretos o pictóricos. Aquí, el estudiante establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analiza rigurosamente tales sistemas.

Cabe indicar que en las investigaciones revisadas suele trabajarse sólo con los primeros cuatro niveles de razonamiento geométrico, posiblemente porque en el ámbito educativo sea difícil que un estudiante requiera manejar distintos sistemas axiomáticos y quizá, por ello, en la literatura la descripción del nivel 5 esté escasamente apoyada en investigaciones empíricas; al respecto, Sarasua et. al. (2013) expresan que en la práctica se consideran cuatro niveles de razonamiento, ya que, el quinto sólo se ha formulado teóricamente, lo cual es un planteamiento también expresado por Usiskin (1982) y Jaime (1993).

Para la comprensión de este modelo, es importante tener en cuenta que los estudiantes no pueden llegar a un nivel si no alcanzan primero a los niveles anteriores y que, además, el paso de un nivel a otro no se da automáticamente con el cambio de edad, sino que el mismo está asociado al tipo de enseñanza recibida por el estudiante. Además, el paso de un nivel a otro no se da en forma brusca (como inicialmente se pensaba), sino de forma progresiva y continua; de manera tal que las habilidades geométricas implícitas en un nivel n, se hacen explícitas en el nivel n + 1.

Además, en el modelo de Van Hiele se propone que cualquier estrategia didáctica orientada a propiciar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, según los niveles mencionados, debe contemplar las siguientes fases de aprendizaje:

Fase 1: Información: El docente conoce los conocimientos previos que poseen sus estudiantes y qué tipo de tareas son capaces de realizar según su capacidad de razonamiento geométrico.

Fase 2: Orientación guiada o dirigida: El docente orienta a los estudiantes para que realicen las exploraciones geométricas iniciales y los induce a observar algunos elementos relacionados con las propiedades geométricas relevantes. En este sentido, Gutiérrez y Jaime (2012) señalan que “el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de la geometría que están estudiando” (p. 57).

Fase 3: Explicitación: El docente incentiva a los alumnos para que comuniquen y expliquen, en forma oral o por escrito, los resultados obtenidos a través de sus exploraciones geométricas.

Fase 4: Orientación Libre: El docente, con el propósito de facilitar el proceso de transferencia y consolidación de los aprendizajes, busca que los estudiantes utilicen y combinen los nuevos conocimientos y habilidades geométricas para resolver problemas.

Fases 5: Integración: Organizar lógicamente y como un todo los nuevos aprendizajes geométricos.

Según Gutiérrez y Jaime (2012), las fases de aprendizaje, componente prescriptivo del modelo de Van Hiele, "constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indican cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos para que faciliten el progreso de los estudiantes y gradúen su aprendizaje" (p. 56).

Por otra parte, Hoffer (1981) propone que la enseñanza de la Geometría debe fomentar el desarrollo de cinco tipos de habilidades prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica; habilidades que, además, asocia a cada uno de los niveles de razonamiento geométrico y que, por tanto, se van desarrollando progresivamente: (a) *Habilidad visual*: Capacidad de observación; (b) *Habilidad verbal*: Uso apropiado del lenguaje de la Geometría; (c) *Habilidad para dibujar*: Expresar ideas geométricas en forma gráfica; (d) *Habilidad lógica*: Capacidad de estructurar argumentaciones lógicas; (e) *Habilidad para modelar*: Capacidad de construir modelos geométricos asociados al medio circundante.

En cambio, Gutiérrez y Jaime (1998) han identificado diferentes procesos de razonamiento (reconocimiento, definición, clasificación y demostración) como característicos de varios de los niveles propuestos por Van Hiele: (a) Reconocimiento de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras; (b) Definición de un concepto geométrico, la cual puede ser considerada de dos maneras distintas: cómo un estudiante formula la definición de un concepto que está aprendiendo o cómo un estudiante emplea una definición dada; (c) Clasificación de figuras geométricas en atención a distintos criterios o su clasificación como parte de diferentes familias o clases; (d) Demostración de propiedades o proposiciones matemáticas.

En atención a la clasificación de las habilidades geométricas por Hoffer (1981) y Gutiérrez y Jaime (1998), se establece que entre las habilidades vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos usando un programa de Geometría Dinámica y el proceso de demostración en Geometría destacan las mencionadas en el Cuadro 2.

De modo que, a pesar que las habilidades para demostrar proposiciones matemáticas se consolidan en el nivel 4 (deducción), se observa que en los niveles previos se desarrollan ciertas habilidades geométricas que permiten abordar la demostración; esta situación ha sido tomada en consideración a la hora de diseñar y poner en práctica una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas geométricos que incorporó el uso de un SGD y la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, así como al momento de describir y analizar las competencias matemáticas que estén relacionadas con la demostración en ambientes de Geometría Dinámica (Iglesias, 2014).

Cuadro 2
Habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico

Nivel 2, Análisis	1. Expresar en un dibujo la información verbal dada. 2. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla. 3. Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos.
Nivel 3, Relaciones, Clasificación u Ordenamiento	1. Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. 2. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figura. 3. Definir con palabras adecuadas y consistentes. 4. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.
Nivel 4, Deducción	1. Utilizar información de otra figura para deducir más información. 2. Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. 3. Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura. 4. Deducir a partir de la información dada cómo dibujar una figura específica. 5. Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. 6. Poder deducir consecuencias a partir de la información dada. 7. Poder deducir propiedades de los objetos geométricos a partir de la información dada. 8. Poder resolver problemas que establezcan relaciones entre objetos físicos y objetos geométricos.

La Demostración en Geometría

A partir de Euclides se presenta el conocimiento geométrico a partir de ciertos términos no definidos y axiomas, de donde se deducen todos los teoremas por medio del razonamiento lógico deductivo. No obstante, dado el carácter empírico

– práctico que la Geometría tuvo en sus inicios es preciso señalar que un porcentaje significativo de los conocimientos geométricos se obtuvo a partir de la observación y experimentación (mediciones y construcciones); esto es, aplicando el método inductivo; de manera que, teniendo en cuenta la evolución histórica de la Matemática como disciplina científica, se puede afirmar que tanto la inducción como la deducción han sido dos vías para llegar al conocimiento matemático. Al respecto, Fetisov (1973) afirmó que

> Por supuesto, los primeros conocimientos geométricos del hombre se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. No obstante, conforme creció el conjunto de conocimientos geométricos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras, por medio de la deducción, sin recurrir a las observaciones o a los experimentos (p. 16).

En los trabajos realizados en el marco de esta línea de investigación, se ha enfatizado en las perspectivas cognitiva y didáctica, pero se reconoce la importancia de abordar el estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, ya que, la misma es una actividad propia y distintiva del quehacer matemático. Por ello, Iglesias y Ortiz (2013) presentaron una aproximación al estudio de la demostración desde una perspectiva epistemológica, a partir de la revisión de algunas investigaciones sobre intuición y demostración mencionadas por D'Amore (2006) y entre las cuales destacan los trabajos realizados por Fischbein (1987), Duval (1999), Balacheff (2000) y Harel y Sowder (2007); encontrándose que la introducción del método axiomático contribuyó a la evolución de la Matemática como disciplina científica y, además, trajo consigo a los métodos de demostración como formas aceptadas de validación de las verdades matemáticas.

Sin embargo, en el ámbito educativo, esto ha ocasionado una sobrevaloración de los llamados contextos de justificación (Sierpinska y Lerman, 1996), descuidando así lo relacionado con el descubrimiento del conocimiento matemático. Esto último pareciera estar asociado a un conjunto de procesos como construir, explorar, visualizar, conjeturar y verificar, los cuales conducirían a sentir la necesidad de justificación; siendo esta necesidad lo que impulsaría a los profesores y estudiantes a dar una explicación, presentar una prueba o realizar una demostración formal. Asimismo, se destacan las relaciones existentes entre la intuición, la demostración y la argumentación; lo cual obliga a tener en cuenta aspectos relacionados con las intuiciones matemáticas (Fishbein, 1987), las prácticas argumentativas (Duval, 1999; Flores, 2007) y las acciones de proceso y producto propias de la actividad demostrativa (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006) a la hora de analizar las acciones y las producciones de los estudiantes para profesor de Matemática cuando resuelvan un problema geométrico en un ambiente de Geometría Dinámica.

Fetisov (1973), atendiendo al carácter axiomático y deductivo de la Geometría, estableció que "una demostración es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas y proposiciones previamente establecidas" (p. 17). Por ello, los matemáticos tienen que enfrentarse con "el problema de la evidencia" (Fischbein, 1987), ya que, ellos requieren distinguir entre las proposiciones directamente aceptables por evidentes y aquellas que tienen que ser probadas, con el propósito de incorporarlas al seno de una teoría axiomática y, dado que la evidencia intuitiva no es sinónimo de certeza, tienen que arriesgarse a usar su intuición al momento de resolver un problema y hacer una demostración. Los matemáticos están dispuestos a demostrar, incluso, lo que parece obvio. Sin embargo, en el ámbito escolar, los estudiantes no comprenden la necesidad de demostrar lo que les parece evidente y, por lo tanto, tienen dificultades para presentar argumentos convincentes que garanticen la veracidad de una proposición. En este sentido, Alsina (1999) afirma que:

> Las demostraciones pueden ser muy instructivas si a su valor argumentativo se une la motivación de su necesidad. Muchas veces conviene resaltar tantos los ejemplos como los contraejemplos, o hacer ver lo que sucedería al suprimir una hipótesis o ser menos restrictivos. (...). (p. 35)

En otro orden de ideas, los ambientes de aprendizajes basados en el uso de un SGD establecen la necesidad de armonizar la intuición y el razonamiento lógico – deductivo, lo cual era una de las grandes aspiraciones de Fischbein (1987). Asimismo, en este tipo de ambientes, es posible distinguir entre verificación empírica y deducción lógica, lo cual está estrechamente relacionado con la validación del conocimiento matemático (Mariotti, 1998).

Según la perspectiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática de Génova (Italia), Boero (1999) plantea que la aproximación a la demostración pertenece a una forma más general de aprendizaje cultural y cognitivo y, por ende, ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas. Además, este investigador estudia los roles múltiples de la argumentación en las actividades matemáticas concernientes a teoremas y la mediación del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración.

Algunos investigadores del Grupo Internacional de Psicología en Educación Matemática (PME) también han centrado sus esfuerzos en el análisis de la influencia de un SGD sobre los estudiantes y las concepciones de la demostración matemática mientras los estudiantes están resolviendo problemas geométricos en un ambiente mediado por tal software.

De manera análoga, la revista ZDM dedicó los volúmenes 34 (1) y 34(3) a la demostración y a la investigación sobre los SGD; entre las ideas relevantes se pueden mencionar: (a) los estudiantes deben distinguir entre la evidencia empírica y la demostración (Hanna y Jahnke, 2002); (b) las investigaciones han contribuido a la descripción y explicación de los procesos de demostración y sus prerrequisitos (Heinze y Kwak, 2002); (c) brindar oportunidades a los estudiantes para la exploración y la argumentación matemática, teniendo como soporte la resolución de problemas (Reiss y Renkl, 2002); (d) los ambientes de Geometría Dinámica son complejos, debido a que exigen el diseño de secuencias de aprendizaje que alternen el trabajo con el software y las discusiones colectivas y, en muchos casos, es necesario redefinir los contenidos, los métodos y el rol del docente (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002); (e) para usar un SGD con fines didácticos se debe hacer una selección de materiales adecuados, y correspondencia de las secuencias de enseñanza con los objetivos de aprendizaje establecidos (Gawlick, 2002).

Asimismo, Reiss, Heinze, Renkl y Groß (2008) señalan que las habilidades para argumentar y demostrar pudieran ser analizadas atendiendo a las exigencias de los problemas planteados a los estudiantes.

En el año 2012 se publica el Estudio ICMI 19 en el cual se examinan varias nociones teóricas y prácticas acerca de por qué y cómo los educadores matemáticos deben acercarse a la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y la demostración. En el Cuadro 3, se muestra una síntesis de los asuntos tratados por estos grupos de trabajo (Hanna y De Villiers, 2012).

En la presentación de esa publicación, se señala que los educadores matemáticos participantes en ese estudio ICMI comparten una visión común de la demostración matemática que trasciende la visión formal de la misma. Por ello, Hanna y De Villiers (2012) afirman que: “Este tomo de estudios trata a la prueba en un sentido más amplio, reconociendo que una visión estrecha de la prueba ni refleja la práctica matemática, ni ofrece las mayores oportunidades para la promoción de la comprensión matemática" (p. 3).

Cuadro 3
Asuntos tratados por los grupos de trabajo participantes en el estudio ICMI 19

Grupo de Trabajo	Coordinador(es)	Asuntos tratados
Desarrollo cognitivo de la Prueba	David Tall y Oleksiy Yevdokimov	Características del desarrollo cognitivo de la prueba en los distintos niveles escolares.
Argumentación	Viviane Durand-Guerrier	Relación entre la prueba y la argumentación desde la perspectiva de las cualidades opuestas como formal vs informal, forma vs contenido, semántica vs sintaxis, verdad vs validez, lógica matemática vs sentido común, prueba formal vs heurística, y continuidad vs discontinuidad.
SGD y Experimentación	Ferdinando Arzarello	Las formas en que las investigaciones matemáticas usando tecnología avanzada y diferentes recursos semióticos se refieren a los aspectos formales del discurso matemático y la producción de pruebas.
Prueba en el currículo escolar	Fou-LaiLin	El conocimiento que los profesores necesitan para enseñar a demostrar con eficacia y de cómo las actividades demostrativas deben estar diseñadas para fomentar la mejor enseñanza acerca de la prueba y la actividad demostrativa.
Naturaleza de la prueba en el aula	Tommy Dreyfus, Hans Niels Jahnke y Wann-Sheng Horng	La forma, el estado y el papel que la prueba debe asumir en cada nivel educativo para asegurar la comprensión matemática.
Prueba en la Educación Universitaria	Annie Selden	Explora todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y demostración en el nivel universitario, incluyendo la transición de la escuela secundaria a la universidad y la transición de la licenciatura al trabajo como matemáticos.

Por lo tanto, la demostración matemática se entiende como "una práctica argumentativa orientada por las leyes de la lógica formal o reglas de inferencia y dirigida a entender el porqué es válida una proposición matemática y convencer a otros y quizá a uno mismo de su validez" (Iglesias y Ortiz, 2013, p. 242). Esta acepción guarda relación con lo propuesto por Flores (2007), quien asumió a la demostración o prueba como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos desde el punto de vista de la lógica formal. Además, sin perder de vista que la demostración como proceso guarda relación con diversas actividades propias del quehacer matemático: exploraciones, estrategias heurísticas, reconocimiento de patrones o regularidades, formulación de conjeturas, verificación empírica, explicaciones, entre otras.

Referencias

Aguilar, R. e Iglesias, M. (2013). La Geometría de los Cuadriláteros en los Libros de Texto de Educación Primaria. *Paradigma*, Vol. XXXIV, Nº 2, 151 – 173.

Alsina, C. (1999). Intuición y Deducción en Geometría. En E. Veloso, H. Fonseca, J.P. da Ponte y P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no virar do milenio (pp. 33 - 41).* Departamento de Educação da Facultade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 66 – 72.

Báez, R. (2010). *Propuesta didáctica para el curso de Geometría de la especialidad de Educación Integral del Instituto Pedagógico Rural "El Mácaro". Evaluación de una unidad didáctica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Báez, O., González, A., Gudiño, G., Noguera, L., e Iglesias, M. (2013). Teorema de Thales: Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 139 - 150). Maracay:

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de Matemática*. Bogotá: Una Empresa Docente de la Universidad de los Andes.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración: Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y en la Educación Matemática [Documento en línea]. *La lettre de la Preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 99 07/08.* Disponible: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeIT.html [Consulta: 2012, Mayo 4]

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 400 - 431.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fetisov, A.I. (1973). *La Demostración en Geometría*. México: Editorial Limusa – Wiley.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (1), 63-98.

Galvis, L. J. (2010). *Estudio de la geometría del espacio mediante la metodología enseñanza y aprendizaje por proyectos*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

García, R. (2009). *Estudio de las funciones reales de una variable real en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik*, 34 (3), 85 - 92.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele Levels of Reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3), 27 – 46.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55 – 70.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En G. Hanna y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 1 – 10). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (2002). Another Approach to Proof: Arguments from Physics. *ZDM*, 34 (1), 1 – 8.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (2 volumes)*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Heinze, A. y Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *ZDM*, 34 (1), 9 – 16.

Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, 74 (1), 11 – 18.

Iglesias, M. (2007). La Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Una experiencia desde el CEINEM – NT. En J. Ortiz Buitrago y M. Iglesias Inojosa (Eds.), *Memorias. VI Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 211 – 225). Maracay: Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2013). La Demostración en Geometría desde una perspectiva epistemológica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 230- 247). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Iglesias, M. (2014). *La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Valencia, España.

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime (Eds.), *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática* (pp. 23 – 43). Bogotá: Una empresa docente.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295 – 384). Sevilla: Alfar.

Linares, O. (2008). *Evaluación de una unidad didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Pitágoras en un ambiente de geometría dinámica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Mammana, C. y Villani, V. (1994). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Discussion Document for an ICMI Study. *L' Enseignement Mathématique*, 40, 345 – 357.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study (pp. 1 – 8).* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, M.A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. *La lettre de la preuve. Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 98 11/12. Disponible: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112.html

Moreno, Z. (2006). *Una propuesta didáctica orientada a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en 8° grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, San Juan de los Morros.

Osorio, A., Gil, C., Gómez, W., Romero, E. e Iglesias, M. (2013). Pitágoras y el Teorema de la Mujer Casada. Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 194 - 204). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Pérez, J. C. (2008). *La calculadora graficadora en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de la circunferencia y del círculo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Pérez, M. (2010). *La metodología de enseñanza – aprendizaje por proyectos en la formación inicial del maestro de educación integral en geometría*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Ramírez, S., Torres, Z., Váldez, K. e Iglesias, M. (2013). La Circunferencia y el Círculo. Una Propuesta Didáctica. En A. González, J. Sanoja de Ramírez, R. García y Z. Paredes (Eds.), *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática* (pp. 217 - 229). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay.

Reiss, K. y Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples.*ZDM*, 34 (1), 29 – 35.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A. y Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40(3). 455 – 467.

Sánchez, R. (2008). *El plegado de papel y las construcciones con regla y compás en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del triángulo a nivel de 7º grado de educación básica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rafael Alberto Escobar Lara, Maracay.

Sánchez, J. e Iglesias, M. (2012). El desempeño de los docentes de matemática y sus necesidades formativas. *Paradigma*, Vol. XXXIII (1), 155 – 173.

Sarasua, J. M., Ruiz de Gauna, J. G. y Arrieta, M. (2013). Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diferentes etapas educativas. *Revista de Psicodidáctica*, 18 (2), 313 – 329.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologías de las Matemáticas y la Educación Matemática. [Documento en Línea] Disponible:

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/SIERLERM.html [Consulta: 2012, Diciembre 12]

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry*. Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda. Disponible:

http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Hiele, P.M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* 198, 199-205. Traducido al español por Ricardo Barroso. Disponible:http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/aprgeorefer.html

Martha Iglesias Inojosa.

Doctora en Educación por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática por la UPEL. Actualmente se desempeña como Profesora Asociada a Dedicación Exclusiva de la UPEL Maracay y Coordinadora del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). Además es integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la UPEL Maracay y Coordinadora de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Es miembro activo de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene publicaciones nacionales e internacionales.

José Ortiz Buitrago.

Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, egresado del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. Licenciado y Magister en Matemáticas por la Universidad Simón Bolívar, Caracas. Profesor Titular de la

Universidad de Carabobo (UC). Director de Proyectos de la Unidad de Investigación del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, UC, Campus La Morita, Maracay; donde dirige la línea de investigación en Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico. Presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene diversas publicaciones en el ámbito nacional e internacional. Ha dirigido varios trabajos de grado de maestría y tesis doctorales en Educación Matemática, en distintas universidades nacionales. Es profesor-investigador del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Ha participado en eventos nacionales e internacionales. Es asesor de varias revistas científicas.

Perspectivas de investigación en el ámbito del pensamiento numérico y algebraico

José Ortiz Buitrago y
Martha Iglesias Inojosa

Perspectivas de investigación en el ámbito del pensamiento numérico y algebraico

Introducción

En este capítulo se esbozan ideas acerca de los intereses y finalidades de la línea de investigación "Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico", así como, los campos de actuación, con el propósito de orientar la indagación y el estudio en esta área de investigación. Asimismo, se hace referencia a resultados obtenidos en proyectos ejecutados en el marco de esta línea. Uno de ellos en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas cuando planifican unidades didácticas de contenido algebraico; y otro orientado a indagar en las competencias didácticas de preparadores de matemáticas en la universidad.

La línea de investigación "Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico" (EMPNA) es una de las líneas de investigación inscritas en la Unidad de Investigación del Ciclo Básico (UICB), Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES) de la Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay. De igual manera, esta línea también constituye uno de los campos de indagación en el Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM) de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Instituto Pedagógico de Maracay. Esta línea se desarrolla tomando como referencia las bases teóricas y metodológicas de la línea del mismo nombre perteneciente al grupo Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada (España) y al grupo español de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (Lupiáñez, Puig y González-Calero, 2015). Como soporte teórico se considera que existe una diversidad de vínculos entre el conocimiento numérico y el algebraico y que los problemas que surgen de la enseñanza y aprendizaje en estos dos campos son similares y las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen elementos comunes (Socas, 1999).

En lo concerniente al pensamiento numérico, Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997) afirman que

> *...comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas*. (p.282).

Respecto al mismo tema, Castro (2008) considera que "*el pensamiento numérico trata de aquello que la mente puede hacer con los números*" (p. 1). Además, esta autora agrega que su desarrollo estará dado por la complejidad de las tareas realizadas por el sujeto. En este sentido, el estudio del pensamiento numérico estaría vinculado a ciertas habilidades numéricas en el ámbito escolar y en el contexto social.

Respecto al pensamiento algebraico, Socas (1999) sostiene que el mismo estudia e investiga acerca de

> *...los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social...* (p.261)

En este sentido, Lupiañez, Puig y González-Calero (2015) afirman que algunos temas a considerar en el pensamiento algebraico están el significado y manejo del lenguaje algebraico, así como el uso de recursos tecnológicos en su desarrollo. Estos autores sugieren campos de problemas similares entre el pensamiento numérico y el algebraico.

En la línea de investigación Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico (EMPNA), se desarrolla un foco de indagación y estudio en Educación Matemática sobre los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y utilización de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos, tanto en el ámbito escolar como en el contexto social. El campo general en que se desenvuelven las investigaciones en pensamiento numérico y algebraico comprenden el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas y algebraicas. En este sentido, en Stacey, Chick y Kendal (2004), se pueden visualizar algunos temas de investigación asociados con este campo de indagación, específicamente, resolución de problemas algebraicos, el rol de los ambientes tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, sistemas de cálculo simbólico, entre otros.

El marco conceptual, en el que se sitúa el pensamiento numérico y algebraico, contempla la valoración del currículo como un plan de formación con diferentes niveles de reflexión e implementación. Asimismo, hay una marcada preocupación por las cuestiones derivadas de la evaluación escolar. En este marco también encontramos indagación respecto a la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas; así como el abordaje de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la formación de ingenieros y otros profesionales no docentes (Mendible y Ortiz, 2007; Medina y Ortiz, 2013).

Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia (1997) proponen un modelo funcional para orientar las investigaciones en pensamiento numérico y algebraico. Dicho modelo está conformado por unos instrumentos conceptuales (sistemas simbólicos estructurados), unos modos de uso de los sistemas simbólicos (funciones cognitivas) y un campo de actuación (fenómenos, cuestiones y problemas). Ese modelo ha sido utilizado en el trabajo de Ortiz (2002), entre otros.

Un aspecto fundamental en el grupo pensamiento numérico y algebraico lo constituye el desarrollo de investigaciones que involucran tecnologías digitales. Al respecto, Socas (1999) hace énfasis en el rol trascendente que debe jugar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, la cual puede contribuir a lograr un aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos. Por otra parte, también se refiere a la investigación en ambientes computacionales como un dominio emergente que requiere de más investigación dentro del grupo pensamiento numérico y algebraico. En este sentido, Thomas, Monaghan y Pierce (2004) se refieren a los sistemas de cálculo simbólico (CAS) como un recurso que tiene un potencial para cambiar la enseñanza y aprendizaje del álgebra; pero que, sin embargo, las investigaciones vinculadas a este tema están en ciernes. Más recientemente, algunos autores han avanzado en las potencialidades de los CAS en la conformación del pensamiento numérico y algebraico (Fey, Cuoco, Kieran, McMullin y Zbiek, 2003).

Desde una perspectiva amplia, el marco conceptual en el que se sitúa el Pensamiento Numérico y Algebraico tiene distintas bases (Rico y otros, 1997):

1. Entiende la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural, cuya importancia para la sociedad tecnológica actual es determinante; tiene en cuenta que la educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad; considera críticamente el conocimiento matemático y las acciones comunicativas mediante las que se transmite.

2. Su campo de reflexión comienza en la aritmética escolar y las nociones básicas de número, avanza por los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y continúa con el estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, los procesos infinitos que dan lugar al sistema de los números reales y los conceptos básicos del análisis. Se denomina conocimiento numérico a este

modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante el uso de las herramientas conceptuales que llamamos estructuras numéricas.

3. Concibe la investigación como indagación sistemática con fines epistémicos y se entiende que la investigación en educación matemática debe sostenerse en la reflexión permanente sobre los problemas de la práctica escolar y de comprensión del contexto físico, cultural y social.

4. Considera el carácter sistémico de cualquier plan de formación en matemáticas dentro del sistema educativo, de manera que uno de los rasgos definitorios de esta línea de investigación es valorar el currículo como un plan operativo con diferentes niveles de reflexión e implementación. Hay gran preocupación por los problemas vinculados a la evaluación escolar en matemáticas.

5. El estudio de las competencias cognitivas que sostienen un dominio significativo de las estructuras numéricas, de su desarrollo y mejora, junto con el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades en la comprensión de los escolares sobre estas estructuras, proporcionan una fundamentación psicológica a las investigaciones.

6. Un núcleo de reflexión, trabajo y estudio en esta línea de investigación está conformado por la tensión entre las familias de problemas que dan lugar al conocimiento matemático, los sistemas de signos utilizados para representar conceptos y procedimientos, y los procesos de modelación con los cuales es posible abordar simbólicamente tales problemas. Estos procesos de modelación han sido objeto de varios trabajos en esta línea, entre los cuales tenemos: Ortiz (2002), Mendible y Ortiz (2007), Ortiz y Dos Santos (2011) y Mora (2014).

7. Uno de los campos de interés principal es la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas. Se considera que el educador matemático requiere de competencia disciplinar y didáctica para la toma de decisiones fundadas en su práctica profesional.

Objetivos generales de EMPNA

- Estudiar la organización conceptual de sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura numérica o algebraica y las interrelaciones entre tales sistemas;

- Analizar la elaboración y construcción mental de sistemas simbólicos, así como la organización, sistematización y desarrollo de diferentes competencias cognitivas basadas en los campos conceptuales de interés;
- Estudiar los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica o algebraica.
- Realizar indagación respecto a la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas.
- Desarrollar investigaciones que involucran nuevas tecnologías informáticas (calculadoras, software de matemática dinámica, campos virtuales, etc.).
- Generar nuevos enfoques metodológicos para estudiar fenómenos de interés en pensamiento numérico y algebraico.
- Utilizar la evaluación de programas educativos como una metodología de investigación que puede contribuir a la toma de decisiones fundadas en programas de formación en educación matemática.
- Contribuir al desarrollo de herramientas teóricas y metodológicas para el fortalecimiento de la educación matemática con repercusiones locales, nacionales e internacionales.

Aportes de investigaciones realizadas en EMPNA

A continuación se presentan resultados de dos investigaciones llevadas a cabo en el marco de EMPNA. La primera de ellas realizada por Mora (2014) y titulada: *Modelización, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas.* En ella se realiza una indagación orientada a profundizar en el análisis del desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza que futuros profesores ponen en práctica cuando planifican unidades didácticas de contenido algebraico. La segunda investigación (Ortiz e Iglesias, 2008) se titula: *Representaciones y Calculadora Gráfica en la Formación de Preparadores de Matemática.* En este trabajo se analizan las producciones de un grupo de preparadores de matemática que participaron en un programa de formación basado en el uso de los sistemas de representación y la calculadora gráfica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el primer año universitario de una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Estudio sobre la competencia de planificación en la enseñanza del algebra

El trabajo de investigación que lleva por título *Modelización, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas* (Mora, 2014), indaga respecto al análisis del desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza que futuros profesores ponen en práctica cuando planifican unidades didácticas de contenido algebraico. Para esto, se desarrolló una investigación cualitativa desde una perspectiva teórica interpretativa, siguiendo una metodología de evaluación de programas (Ortiz e Iglesias, 2006). El estudio se desarrolló con 27 estudiantes de la Carrera de Educación Mención Física y Matemática de la Universidad de Los Andes-Táchira y su profesor formador.

Específicamente en esta investigación se intenta comprender cómo los futuros profesores aprenden a enseñar matemáticas y particularmente los contenidos del álgebra de Educación Media, a través de la planificación de la enseñanza. Mediante la planificación de unidades didácticas utilizando el análisis didáctico, los organizadores del currículo y la integración de la modelación y los sistemas de cálculo simbólico (SCS) como recursos tecnológicos. Es decir, se pretende indagar sobre el desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza en la formación inicial del profesor de matemáticas de la Universidad de Los Andes, Núcleo Táchira. Se toman como referente en esta investigación los contenidos del álgebra escolar presentes en el currículo de matemáticas de Educación Media, debido a que la modelización aparece como un proceso de natural desarrollo en los campos del álgebra (Ortiz, 2002; Paredes, Iglesias y Ortiz, 2009).

Por otra parte, si bien los trabajos de investigación llevados a cabo en el contexto internacional muestran la importancia de la modelación y la utilización de herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por sus implicaciones en el desarrollo del conocimiento matemático, aún existe una brecha entre las ideas expresadas en el debate sobre la educación matemática y la práctica de la enseñanza cotidiana (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). Situación similar sucede en Venezuela, donde el currículo necesita superar el uso instrumental para andar hacia el logro de competencias para el ámbito extra-escolar en distintas áreas del conocimiento matemático.

En relación con la modelación matemática, su inclusión como estrategia de enseñanza fortalecería la formación inicial de profesores de matemáticas, lo cual podría motivar su inclusión en los currícula de educación media.

En otras palabras, el programa formativo proporciona a los profesores en formación oportunidades y experiencias de reflexión sobre la enseñanza de contenidos matemáticos. Experiencias que tienen como finalidad configurar en el conocimiento del profesor, el eslabón entre las matemáticas y el contexto real del estudiante. Las reflexiones y la negociación de significados sobre la enseñanza de un contenido, constituyen oportunidades para desarrollar el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas.

Resultados

Respecto a las competencias de planificación, puestas de manifiesto por los profesores en formación, durante la implementación del programa propuesto, algunas de las conclusiones fueron las siguientes:

1. Con respecto al análisis didáctico, todos los participantes lograron integrar al menos la mitad de las capacidades asociadas a éste. Se observaron logros cognitivos importantes en los tres análisis en consideración. Los organizadores que generaron mayor interés en los profesores en formación fueron la fenomenología, las expectativas de aprendizaje, los errores y las tareas. Precisamente, en estos organizadores, debieron enfrentar y abordar sus mayores dificultades.

   Los avances en la planificación de la unidad didáctica de los grupos de futuros profesores, les permitieron comprender la complejidad de la enseñanza de contenidos matemáticos y reconocieron la importancia de las tareas dentro de la planificación de la enseñanza de un contenido matemático. En este sentido, visualizaron en ellas el aspecto funcional de la planificación, pues les permitía mostrar al estudiante la aplicabilidad del contenido, y además, dar sentido a la información recolectada en los tres análisis desarrollados. En otras palabras, las tareas les permitieron situarse en la posición del estudiante y su aprendizaje y constituyeron la parte operativa de la planificación para el logro de las expectativas de aprendizaje. La planificación de las unidades didácticas, usando el análisis didáctico, desarrolló en los grupos una visión funcional de la enseñanza de contenidos matemáticos.

2. La planificación de unidades didácticas por parte de los profesores en formación involucró el diseño de tareas. Esto preveía el uso de la modelización como estrategia de enseñanza e integración recursos tecnológicos para la enseñanza de contenidos matemáticos.

Las comunidades lograron mostrar avances con respecto al uso de la modelización como estrategia de enseñanza. En este sentido, si bien la mayoría de ellas no presentaron un amplio número de tareas, lo expresado por cada una a lo largo del desarrollo del programa formativo, permitió identificar cambios cognitivos importantes con respecto a esta estrategia. En este sentido, se observaron avances con respecto al concepto de modelización, pues el trabajo de cada comunidad inició sin un concepto claro sobre ella, luego lo relacionaron con solución de problemas y por último lo relacionaron con estrategia de enseñanza.

Por otra parte, lograron desarrollar e incorporar en su propuesta final, varias de las capacidades asociadas al uso de la modelización en el diseño de tareas de la unidad didáctica. De manera general, se logró percibir el uso de los organizadores del currículo para estructurar la propuesta de tareas por parte de las comunidades de práctica. Adicionalmente, la información recabada en cada análisis y organizador, fue utilizada por de manera coherente en el diseño de las tareas. Por último, se logró observar que las comunidades establecieron conexiones entre los distintos organizadores del currículo y el diseño de tareas con modelización.

El conocimiento sobre la modelación, como estrategia de enseñanza, fue percibido por las comunidades como útil, tanto en lo formativo como para su futura labor como profesionales. También apreciaron que el diseño de tareas con modelación, centra la enseñanza en el aprendizaje del estudiante. Por otra parte, todas las comunidades desarrollaron una visión funcional de la modelación como estrategia de enseñanza, pues vieron en ella una estrategia para presentar una matemática más funcional al estudiante, que les permitiría conectar el contenido con su contexto y mostrarle sus utilidades. De este modo, esta estrategia les permitiría generar interés en el estudiante de Educación Media hacia el aprendizaje de un contenido matemático.

Se observó la puesta en práctica de diversas capacidades asociadas al uso de recursos tecnológicos en el diseño de tareas y su integración con la modelización para tres de las comunidades. Finalmente, dejaron ver que todos las futuros profesores debieron enfrentar y abordar dificultades para el diseño de las tareas con modelización, relacionadas con las dificultades previas con el análisis didáctico; el uso de recursos tecnológicos como recursos de enseñanza; la ausencia de experiencias tanto con las herramientas tecnológicas como con la modelización y además con el diseño de tareas; y el modelo de formación previo.

El estudio realizó contribuciones a la problemática de aprender a enseñar matemáticas desde la planificación de la enseñanza. Los resultados de este trabajo podrían contribuir en el análisis sobre el desarrollo de este conocimiento fundamental para el profesor de matemáticas. En consecuencia, los aportes se relacionan con la formación inicial del profesor de matemáticas, con la comprensión de su aprendizaje y el desarrollo de su conocimiento didáctico.

Estudio sobre la formación de preparadores de matemática

El trabajo de investigación que lleva por título *Representaciones y Calculadora Gráfica en la Formación de Preparadores de Matemática en la Universidad* (Ortiz e Iglesias, 2008), indaga respecto a las competencias didácticas de preparadores de matemáticas cuando participan en la implementación de un programa que incorpora las representaciones y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas relacionadas con las matemáticas del primer año de universidad en una facultad de ciencias económicas y sociales (FACES). La pertinencia de la investigación procede del reglamento de preparadores vigente en la Universidad de Carabobo (1994), tomando en consideración que en dicho reglamento se le otorga a los preparadores la condición de personal docente en formación, cuya función primordial es colaborar en las labores de docencia e investigación. En nuestro caso específico contribuir con la enseñanza de las matemáticas en FACES, para lo cual ellos no tienen formación didáctica. Tales preparadores son estudiantes de FACES seleccionados mediante un concurso de oposición público donde se toma en cuenta su buen expediente académico y además deben presentar una prueba escrita y una prueba oral ambas diseñadas y aplicadas por un jurado conformado por tres profesores de la Cátedra de matemáticas.

El propósito del estudio es indagar acerca del conocimiento didáctico que desarrollan los preparadores de matemática mediante el manejo e incorporación de la calculadora gráfica en actividades didácticas, y de qué manera lo integran en su conocimiento profesional. También se pretende identificar los criterios que manejan los preparadores de matemática para el uso de los sistemas de representación y de qué manera recurren a ellos. Además, determinar qué potencialidades didácticas brindan los contenidos matemáticos para el establecimiento de vínculos y relaciones entre la calculadora y los sistemas de representación, en la formación de preparadores de matemática.

En el estudio se consideran las producciones de los participantes en relación con el uso de la calculadora gráfica y las representaciones en la enseñanza del álgebra y el cálculo diferencial, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y su articulación con las representaciones; así como, el empleo de estos organizadores para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, el conocimiento didáctico del preparador de matemáticas.

A partir del análisis se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas acudiendo a diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, los aspectos de interés surgidos en la discusión y reflexión sobre los abordajes de los problemas, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo. Respecto al apoyo de la calculadora gráfica, como recurso didáctico, se analizó su utilización para la comprensión de los conceptos matemáticos y propiedades en las situaciones planteadas en el diseño de actividades didácticas. También se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la calculadora gráfica.

Resultados

Los preparadores plantearon ejercicios y situaciones del mundo real ajustados a los niveles de las carreras de administración y contaduría y cercanas al entorno y dominio de los alumnos a quienes ellos atienden en sus labores docentes. En cuanto al organizar *materiales y recursos*, se evidenció competencia en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el preparador como para el alumno. Se reveló una postura ante la enseñanza de las matemáticas que colocaba al alumno en un plano de sujeto activo, donde éste podría experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el preparador. Los preparadores recurrieron a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual reveló la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploraron formas de explicar las matemáticas a los alumnos como mecanismo para favorecer la comprensión de los ejercicios y situaciones problema. Se puso en evidencia la integración de las representaciones y la CG en la resolución de problemas para el diseño de las actividades didácticas.

Las producciones de los participantes estuvieron referidas a: (1) La aplicación sistemática de los sistemas de representación en la resolución de ejercicios y problemas, (2) El uso de la experimentación con la CG para la resolución de problemas, (3) La utilización de la calculadora gráfica en la comprensión y resolución de problemas y (4) La utilización de las potencialidades de la calculadora gráfica con fines didácticos. Esto significa que los preparadores mostraron capacidad para incorporar nuevas competencias didácticas en el uso de los sistemas de representación y la calculadora gráfica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Los preparadores pusieron en evidencia su dominio de aplicación para integrar en la dinámica de enseñanza los sistemas de representación y el uso de la calculadora gráfica.

Los preparadores propusieron problemas reales lo cual podría contribuir al desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos y fomentar el uso de la modelización matemática como una estrategia enriquecedora de sus competencias didácticas. Todo esto fue propuesto teniendo como núcleo fundamental la integración de los sistemas de representación y la calculadora gráfica, pues a lo largo de todo el curso-taller los participantes mostraron producciones en esta dirección.

Reflexiones finales

El propósito de la línea de investigación pensamiento numérico y algebraico (EMPNA) es la indagación en una multiplicidad de campos con miras a contribuir a la conformación de una educación matemática de calidad. En ese sentido, en la actualidad hay interés manifiesto en la ejecución de proyectos que estén dirigidos a la mejora de la práctica escolar, a explicar fenómenos del aprendizaje en poblaciones de estudiantes con bajo rendimiento académico, también a estudiar el pensamiento numérico y algebraico en vinculación con el pensamiento geométrico (Iglesias, 2014) y el pensamiento estadístico (Sanoja, 2012). Sin dejar de lado la búsqueda de nuevos abordajes teóricos y metodológicos.

En el primer estudio (Mora, 2014), se deja constancia de la potencialidad que ofrecen la planificación de la enseñanza y el análisis didáctico, a partir del proceso de modelación matemática y los recursos tecnológicos en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

En el segundo estudio (Ortiz e Iglesias, 2008) se pone en primer plano la figura del preparador de matemáticas, como un profesor en formación, que podría mejorar su práctica docente si se le incorpora en actividades de formación didáctica, específicamente en los temas de matemáticas que están vinculados a su trabajo práctico.

En ambos estudios se refleja uno de los objetivos de EMPNA, el cual consiste en la necesidad de impulsar la investigación para motivar o generar cambios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para continuar la producción científica en EMPNA se hace necesaria la conformación de espacios de discusión del pensamiento numérico y algebraico, visto desde diferentes perspectivas y en distintos niveles educativos. De esta manera podría orientarse más a los potenciales investigadores a trabajar en esta línea. En la actualidad se están ejecutando varios proyectos de maestría y doctorado que están en fases intermedias de desarrollo. Esto genera expectativas e interés por EMPNA y los distintos problemas que se pueden abordar en su marco, tanto a estudiantes de maestría como del doctorado en educación matemática. También se ejecuta actualmente un proyecto de investigación relacionado con la repitencia en matemáticas en el ámbito universitario.

Referencias

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.W y Niss, M. (Eds). (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study). New York: Springer.

Castro E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. En J.M. Cardeñoso y M. Peñas (Coords.), Actas de la XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas (pp. 23-32), Granada.

Fey, J., Cuoco, A., Kieran, C., McMullin, L. y Zbiek, R. (Eds.). (2003). Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Iglesias, M. (2014). La Demostración en Ambientes de Geometría Dinámica. Un Estudio con Futuros Docentes de Matemática. Tesis Doctoral. Maracay, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Lupiáñez, J.L., Puig, L. y González Calero, J.A. (2015). Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30(1). Disponible en: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos

Medina, J. y Ortiz, J. (2013). Competencias matemáticas y uso de calculadora gráfica en un contexto de resolución de problemas aplicados. Revista Unipluriversidad, 13(3), 14-28.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. Enseñanza de la Matemática, 16(1), 133-150.

Mora, A. (2014). Modelización, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas. Tesis Doctoral. Mérida, Venezuela: Universidad de Los Andes.

Ortiz, J. (2002). Modelización y Calculadora Gráfica en la Enseñanza del Álgebra. Estudio Evaluativo de un Programa de Formación. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalles/5500/

Ortiz, J. e Iglesias, M. (2006). Uso de la Evaluación de Programas en la Formación Inicial de Profesores de Matemática. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 19 (pp. 709 - 714). México: CLAME.

Ortiz, J. e Iglesias, M. (2008). Calculadora gráfica y representaciones en la formación de preparadores de matemática en la universidad. SAPIENS. Revista Universitaria de Investigación, 9(2), 103-118.

Ortiz, J. y Dos Santos, A. (2011). Mathematical Modelling in High School. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), Trends in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (pp. 127-135). New York: Springer.

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de Matemática. Una propuesta con Modelización y Nuevas Tecnologías. REICE, 7(1), 86-102.

Rico, L., Castro, E., Castro E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997). Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular. En L. Rico (Ed.), Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid: Síntesis

Sanoja, J. (2012). La enseñanza de la Estadística en la escuela primaria. Un estudio desde los futuros profesores de matemática. Tesis Doctoral. Maracay, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Socas, M. (1999). Perspectivas de Investigación en Pensamiento Algebraico. En T. Ortega (Ed.), Actas del III SEIEM (pp. 261-282). Valladolid:

Universidad de Valladolid/Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (Eds.). (2004). The future of Teaching and Learning of Algebra (The 12th ICMI Study). New York, USA: Kluwer Academic Publishers

Thomas, M., Monaghan, J. y Pierce, R. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculo, Assessment, Teaching and Learning. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal, M. (Eds.), The future of Teaching and Learning of Algebra (The 12th ICMI Study). New York, USA: Kluwer Academic Publishers

Universidad de Carabobo (1994). Reglamento de preparadores. Valencia: Autor. Disponible en: http://www.uc.edu.ve/

José Ortiz Buitrago.

Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, España, egresado del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. Licenciado y Magister en Matemáticas por la Universidad Simón Bolívar, Caracas. Profesor Titular de la Universidad de Carabobo (UC). Director de Proyectos de la Unidad de Investigación del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, UC, Campus La Morita, Maracay; donde dirige la línea de investigación en Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico. Presidente de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene diversas publicaciones en el ámbito nacional e internacional. Ha dirigido varios trabajos de grado de maestría y tesis doctorales en Educación Matemática, en distintas universidades nacionales. Es profesor-investigador del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Ha participado en eventos nacionales e internacionales. Es asesor de varias revistas científicas.

Martha Iglesias Inojosa.

Doctora en Educación por la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). Profesora de Matemática con Maestría en Enseñanza de la Matemática por la UPEL. Actualmente se desempeña como Profesora Asociada a Dedicación Exclusiva de la UPEL Maracay y Coordinadora del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). Además es integrante del Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando Nuevas Tecnologías (CEINEM – NT) que funciona en la UPEL Maracay y Coordinadora de la Línea de Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. Es miembro activo de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, Capítulo Aragua. Tiene publicaciones nacionales e internacionales.

Unidad de Investigación del Ciclo Básico.
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales,
Universidad de Carabobo, Campus La Morita

Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación

ISBN: 978-980-233-603-6