

*Métodos Miméticos Aplicados a la Ecuación
de Helmholtz en 1D Sobre Mallados
No-Uniformes.*

Mairim Colmenares

24 de noviembre de 2008



Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas



*Métodos Miméticos Aplicados a la Ecuación
de Helmholtz en 1D Sobre Mallados
No-Uniformes*

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo
por la **Br. Mairim C. Colmenares** para optar al título de Licenciada en
Matemáticas.

Tutor: Prof. Orestes Montilla

Cotutor: Prof. Carlos Cadenas

Valencia, Venezuela
24 de noviembre de 2008

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad de Carabobo como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Métodos Miméticos Aplicados a la Ecuación de Helmholtz en 1D Sobre Mallados No-Uniformes**”, presentado por la **Br. Mairim C. Colmenares**, titular de la Cédula de Identidad **16.270.061**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemáticas**.

Prof. Orestes Montilla
Tutor

Msc. María A. Alvarado
Jurado

Msc. Máximo Mero
Jurado

DEDICATORIA

A mis padres.

A mis hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Creo que esta es una de las partes más pensadas durante toda la elaboración del texto, el motivo de esto es el no querer que faltara ninguna de las personas que merecen formar parte de estas líneas, por lo tanto, de antemano pido disculpas porque estoy segura que me faltaran muchísimas.

Primeramente debo agradecerle a ese ser llamado Dios, ya que él dispuso a dos personas maravillosas como mis padres y amigos, a mi madre Milagro Carolina Castellanos y mi padre Gustavo Colmenares, personas que se han preocupado por darme todo el apoyo necesario para mi desarrollo como persona y profesional, a los que debo mucho más que la vida. Ustedes han sido mucho más que mis padres han sido mis cómplices, mis amigos, mis confidentes y el motor principal que impulso la realización y culminación de este proyecto que decidí emprender hace ya unos años, a ustedes ¡muchísimas gracias!.

A Gustavo a quien siempre llamaré *Tavi*, por acompañar mientras pudo a los viejos y ahora, en este último año, por acompañarme a mi, por estar pendiente de mi en estos días de locura; a JuanPablo por ser la alegría más pequeña de la casa, por darle oficio a nuestros padres y por sacarme una sonrisa cada una de las veces que llamé a la casa, mientras tratando de aprender a hablar me pedía la bendición y un chocolate.

También debo agradecerle a mi abuelita Senobia, por su apoyo y por sus divinas tortas, ¡uhmm!...solo recordarlas me hace agua la boca, por siempre tener una palabra de aliento y por ser mi mayor cómplice.

A mi tía Miriam, por ser ejemplo a seguir y por ayudarme tantas veces en los momentos de apuros y aún seguir haciéndolo, por sus consejos y su paciencia.

A mis tios Cesar, Román, Walter y Elsa por mostrarme siempre su apoyo, por estar pendiente de mi y tener siempre la disposición a ayudarme, se que de haber

podido ayudar mucho mas lo hubiesen hecho. No puedo dejar de agradecer a mis primos Walter, Dayi, Marigaby, Borinel y Borisel por comprenderme y perdonarme todas las veces que deje de acompañarlos, por uno u otro motivo.

A Luis Blaidés (El Negro), a tí que a pesar de todas las peleas que tuvimos durante la carrera, siempre has estado conmigo, en las buenas y en las malas, además, debó de felicitarte por la maravillosa familia que tienes.

A Guicho, Xioma, Jean, la Nena, Ovelio, Gaby y las alegrías de la casa Ana Jesús y Victor Jesús, muchísimas gracias por abrirme las puertas de sus corazones y acobijarme durante todos estos años como una más de ustedes.

A mis hermanas Kela y Vaquita por soportar mis cambios de humor, mis loqueras, por convertirse en algo mas que unas simples amigas..., jamás creo poder olvidar tú cumpleaños Vaquita (otro como ese...¡no, por favor!). A Yoselyn por estar estos meses conmigo y sufrir a mi lado; por supuesto a las muchachas de la residencia y a la Sra. Alicia, ¡muchas gracias!.

A Einar, por todas los aventones que me dio, por sacarme de apuros, por ser como el "Chapulín Colorado".

A Jordan, por acompañarme durante estos años, por el apoyo via internet, por ser como es.

A Enrique (*Kike*), por los buenos momentos en el puesto de teléfono, por su apoyo cada vez que lo necesite.

A mis compañeros de carrera por su apoyo en los momentos difíciles, también debo agradecerle a los profesores del departamento de Matemática, por soportarnos todos los desastres y bochinchas que armamos, muy especialmente a José Marcano (Mi Hijo) quien siempre con su bochinche y su "*todavía queda tiempo*" nos hizo correr más de una vez. Al profesor Rafael Ortega por enseñarme muchísimas cosas y siempre tener la disponibilidad para ayudarme.

A mis tutores y amigos, Oreste Montilla y Carlos Cadenas, por toda la colaboración prestada a pesar de las obligaciones y las distancias; sobre todo a Orestes, después de todas esas amenazas de secuestro, ja ja ja.

A Dany De Cecchis, por todos los jalones de orejas que me dio cuando flojeaba, por ser un gran amigo y compañero, por enseñarme que la gente se quiere como es y punto, sino no se quiere..., por todo su apoyo, ¡¡muchísimas gracias!! Como lamento que estes lejos y y no puedas compartir con Bianca y conmigo en estos días de alegría.

A mi amiga Lenys Bello, por compartir conmigo muchísimos momentos, por ser ejemplo a seguir y por darme el apoyo necesario cuando lo necesite.

A mi secre Hermi, a la Sra. Mary y a la negra Yohana, por toda su colaboración, por los buenos deseos y la disposición para ayudarnos a cada uno de nosotros en todo momento.

A mi gente de control de estudio, por tener siempre la disposición de colaborarme y aguantarme mientras le montaba cacería a Oreste.

Antes de finalizar estos agradecimientos debo agradecerle a José Luis Ramirez, por todo su apoyo para la culminación de esta tesis, por ayudarme a resolver los inconvenientes presentados y por inyectarme un poquito de su particular paciencia.

A todas aquellas otras personas que de una forma u otra intervinieron en mi formación personal y profesional, por lo menos hasta el momento, muchísimas gracias...

Mairim Carolina Colmenares Castellanos (*La flak*)

Índice general

1. EL PROBLEMA	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. <i>Objetivo General</i>	6
1.4.2. <i>Objetivos Específicos</i>	6
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Ecuación de Helmholtz	7
2.2. Método de Diferencias Finitas	12
2.3. Conceptos Básicos	13
2.3.1. <i>Mallados</i>	14
2.3.2. <i>Funciones Discretas</i>	17

2.3.3.	<i>Matriz Centrosimétrica</i>	18
2.3.4.	<i>Matriz Anticentrosimétrica</i>	18
2.3.5.	<i>Matriz con Estructura tipo Toeplitz</i>	19
2.3.6.	<i>Ecuación de Onda Unidimensional</i>	19
2.3.7.	<i>Condiciones de Frontera</i>	19
2.4.	Método Castillo-Grone:	20
2.4.1.	<i>Esquema de Discretización Mimética</i>	21
2.5.	Método Montilla-Cadenas-Castillo(MCC):	26
2.6.	Método MCC sobre Mallados No-Uniformes:	29
2.6.1.	<i>Divergencia Mimética No-Uniforme</i>	30
2.6.2.	<i>Gradiente Mimético No-Uniforme</i>	34
2.7.	Teorema de la Divergencia Generalizada	40
2.8.	Orden de Convergencia de los Operadores:	43
3.	Resolución de la <i>Ecuación de Helmholtz</i>	54
3.1.	Generación del Mallado No-Uniforme	54
3.2.	Discretización de la <i>Ecuación de Helmholtz</i>	56
3.3.	Análisis de Orden de Convergencia	62
3.4.	Solución mediante Diferencias Finitas No-Uniforme	65
3.5.	Comparación de los Métodos	72

3.5.1. <i>Dispersión numérica</i>	74
3.6. Conclusiones y Comentarios Finales	76
A. Ecuación de Onda	78
B. Cálculo Operadores Miméticos y Resolución de la EH	84
C. Funciones Generadas para el Cálculo de los Operadores	96
D. Códigos Diferencia Finita	104
E. Código para el cálculo del error	108
F. Operadores Discretos No-Uniformes en 1D	109

Índice de figuras

2.1. Mallado No-uniforme Suave	16
2.2. Mallado No Uniforme No Suave	16
2.3. Mallado Intercalado	17
2.4. Función Nodal	17
2.5. Función Celda-Valuada	18
2.6. Operadores Discretos	22
2.7. Mallado Intercalado	29
2.8. Divergencia No-Uniforme $N = 9$	34
2.9. Gradiente No-Uniforme $N = 9$	40
3.1. Mallado No-Uniforme para $N = 9$	55
3.2. Convergencia para $w=10$	64
3.3. Convergencia para $w=100$	65

3.4. Convergencia para $w=200$	66
3.5. Mallado para Diferencias Finitas	67
3.6. Laplaciano $N = 9, w = 2\pi i$	69
3.7. Laplaciano $N = 10, w = 2\pi i$	70
3.8. Laplaciano $N = 11, w = 2\pi i$	70
3.9. Matriz Identidad Extendida $N = 11, w = 2\pi i$	72
3.10. Mimético Vs DF $w = 10$	73
3.11. Mimético Vs DF $w = 100$	74
3.12. Convergencia Mimético Vs DF $w = 10$	75
3.13. Convergencia Mimético Vs DF $w = 100$	76

Resumen

Este trabajo se enfoca en las investigaciones realizadas en el 2006 por *Montilla-Cadenas-Castillo* [1], en las cuales se realiza una generalización del método de *Castillo-Grone* y efectúan un aporte sobre la obtención de los operadores diferenciales discretos sobre mallados no-uniformes. Haciendo uso de los resultados obtenidos por estos investigadores se elaboró un algoritmo que permite la construcción de dichos operadores para un N cualquiera y $k = 2$, donde k representa el orden del operador, para un mallado no-uniforme. Los operadores obtenidos se emplearon en la resolución de la *Ecuación de Helmholtz* en 1D sobre mallados no-uniformes y se generó un esquema en *Diferencias Finitas* para la comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos.

Palabras Claves: Métodos Miméticos, Mallados No-Uniformes, *Ecuación de Helmholtz* .

Capítulo 1

EL PROBLEMA

1.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son de gran importancia en problemas de la física y otras ciencias, ya que modelan los fenómenos que en ellos se presentan. Por ejemplo, en los análisis de índice bursátil, crecimiento poblacional o el posicionamiento en órbita de un satélite, entre otros, se describen modelos dinámicos, los cuales están sujetos a condiciones iniciales y condiciones de fronteras que están definidas en el espacio o dominio de la investigación.

Existen muchas áreas de estudio donde el uso de las *Ecuaciones Diferenciales Parciales* es imprescindible, por ejemplo : acústica, electrodinámica, mecánica cuántica, dinámica de fluidos, meteorología, óptica, transferencia de calor, entre otros. La solución de estas ecuaciones desde un punto de vista analítico es extremadamente difícil o imposible. Este problema se logra salvar al experimentar su solución con diversas técnicas numéricas, entre las cuales podemos mencionar los métodos de Diferencias Finitas, métodos de los Elementos Finitos, método de Elementos Volumen, métodos sin mallas(Mess Free), etc.

Un enfoque para resolver estas ecuaciones diferenciales es el conocido *Método*

Mimético el cual se caracteriza por discretizar la teoría clásica del continuo. Estos métodos conservan propiedades importantes del cálculo diferencial e integral, lo cual es una ventaja puesto que muchos de los modelos en *Ecuaciones Diferenciales Parciales* se pueden expresar en términos de los operadores lineales Divergencia, Gradiente y Laplaciano.

La idea de los métodos miméticos se remonta a los años 80 cuando un grupo, liderado por Alexander Samarskii [2], desarrolló el *Método de Operadores de Referencia*, también conocido como *Método de Operadores de Soporte*. Este método usa versiones discretas de las identidades integrales con la finalidad de emular propiedades importantes de la teoría del continuo. Las investigaciones más relevantes en esta dirección se puede mencionar los trabajos realizados por Castillo-Grone en el 2003 [3] y Castillo-Yasuda [4].

En la investigación desarrollada por Castillo-Grone se describe una metodología basada en el análisis matricial para operadores discretos miméticos de orden mayor a 4. Posteriormente, en el 2004, Montilla y Cadenas [5] realizan una generalización de las matrices de Vandermonde necesarias para la construcción de los operadores discretos miméticos.

En el 2006 Montilla y otros [1] realizan una extensión del método de Castillo-Grone para el caso de mallas no-uniformes, basándose en la generalización de las matrices de Vandermonde obtenidas por Montilla-Cadenas [5].

En este trabajo usaremos el método basado en los operadores diferenciales discretos miméticos obtenidos por Montilla, Cadenas y Castillo para el caso de mallas no-uniformes en 1D [1], para dar solución al problema de dispersión de ondas acústicas modelado por la *Ecuación de Helmholtz*, haciendo uso de un programa elaborado en un lenguaje de programación de alto nivel. A su vez se estudiará el orden de aproximación de dicho método así como de la solución obtenida y, compararlo con algunos resultados obtenidos a través del Método de Diferencias Finitas.

1.2. Antecedentes

Motivado al interés presentado por la comunidad científica en cuanto a la resolución de las *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, se han desarrollado un sin número de artículos abocados a encontrar soluciones lo más exactas posibles y de bajo costo computacional, que permitan realizar los cálculos de una manera más sencilla y eficaz. Esto ha dado paso al desarrollo de los métodos miméticos, que son métodos que preservan propiedades importantes del continuo y es en los mismos donde se va a centrar la investigación desarrollada en este trabajo.

En 1996 Mikhail J. Shashkov y Stanly Steinberg [6] desarrollaron nuevas técnicas de Diferencias Finitas que permiten la resolución de ecuaciones de difusión con coeficientes complejos sobre mallados rectangulares generales.

En 1998 James M. Hyman y Mikhail J. Shashkov [7], analizaron problemas del continuo como la *Ecuación de Poisson* con condiciones de frontera y dieron a conocer que se preservan las propiedades de simetría de los operadores en el caso discreto, además describieron el *Método de Operadores de Soporte* para aproximaciones de la Divergencia y Gradiente en un mallado no-uniforme y proporcionaron un análisis detallado que prueba que las aproximaciones con valores en la frontera son operadores positivos y simétricos.

En el año 2003 José E. Castillo y R. D. Grone [3], presentaron un enfoque matricial para la generación de operadores miméticos para la Divergencia y el Gradiente; basado en la discretización escalonada uniforme de un dominio unidimensional.

En el año 2003 Juan Rodríguez [8], obtuvo aproximaciones para los operadores continuos Divergencia y Gradiente mediante el desarrollo de una herramienta computacional para los métodos de Diferencias Finitas aplicados a la denominada *Ecuación de Helmholtz*

En el año 2004 Carlos Cadenas y Vianey Villamizar [9], compararon el

funcionamiento de algunos métodos de Elementos Finitos con un método implícito de Diferencias Finitas al ser aplicados a un problema de dispersión de ondas acústicas en 1D (*Ecuación de Helmholtz*).

En el año 2004 Carlos Cadenas y Orestes Montilla [5], desarrollaron una generalización de las entradas de las matrices de Vandermonde para la construcción matricial de los operadores de Divergencia Discreta Mimética.

En el año 2006 Orestes Montilla, Carlos Cadenas y José Castillo [1], plantearon una generalización de la técnica desarrollada por *Castillo-Grone* [3] para la obtención de los operadores (Divergencia y Gradiente) sobre mallados no-uniformes.

En el año 2006 Carlos Cadenas, Javier Rojas y Vianey Villamizar [10] usaron el método de Elementos Finitos Mínimos Cuadrados en un problema de dispersión de ondas acústicas gobernado por la *Ecuación de Helmholtz* sobre mallados uniformes en 1D.

En el año 2006 F. Hernández y C. Buchart [11], mostraron un estudio numérico de distintos esquemas de discretización en *Diferencias Finitas* en 1D. Algunos de estos esquemas usan el método de Operadores de Referencia y las técnicas de Castillo-Yasuda-Grone.

En el año 2007 F. Hernández y otros [12], realizaron un estudio experimental de los métodos iterativos para la solución de sistemas lineales grandes mediante una discretización mimética de segundo orden en $2D$.

En el año 2007 L. Blaidés [13] realizó el cálculo de los operadores miméticos bidimensionales sobre un mallado tensorial uniforme, utilizando una adaptación de la metodología de Montilla, Cadenas y Castillo [1].

1.3. Justificación

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en física y muchas otras ciencias, pero es enorme la dificultad que se presenta para hallar la solución analítica de éstas. Esta clase de inconvenientes ha motivado a un gran grupo de investigadores a desarrollar técnicas numéricas que permitan obtener soluciones eficientes y confiables, técnicas que satisfagan los teoremas clásicos del cálculo vectorial y las leyes de conservación, entre otros. Algunas de los modelos que involucran estas ecuaciones están formulados en términos de los operadores diferenciales de primer orden (Divergencia y Gradiente), estos operadores discretos no mantienen regularmente algunas propiedades físicas importantes de los operadores continuos.

A lo largo de los años se ha ido evolucionando con respecto a las técnicas que cumplan las propiedades antes mencionadas (Leyes de Conservación Global, Teorema de la Divergencia Generalizada, entre otros). El inicio de estas técnicas se remontan al año 1982 cuando Samarskii presenta el *Método de Operadores de Referencia* (también conocido como Operadores Soporte). En el año 1996, Shashkov publicó el único libro conocido hasta el momento sobre el *Método de Operadores de Referencia* [14].

En el 2003 Castillo y Grone publicaron un trabajo, donde se describen una metodología para la construcción de operadores miméticos para la Divergencia y el Gradiente, el cual se fundamenta en el empleo de la formulación matricial para el cálculo de los operadores. Estos operadores miméticos preservan propiedades importantes de los operadores continuos, así como también se puede observar la claridad y sencillez de dichos métodos.

En el 2006 Montilla, Cadenas y Castillo realizaron una extensión del método de Castillo-Grone para obtener los operadores miméticos, a través de la generalización obtenida para la construcción de las matrices de Vandermonde en el 2003 por Montilla-Cadenas.

En este trabajo se usará la metodología desarrollada por Montilla, Cadenas y Castillo, al caso unidimensional sobre mallados no-uniformes para resolver el sistema de ecuaciones generado al sustituir los operadores correspondientes en la conocida *Ecuación de Helmholtz*, esta ecuación tiene particular interés, en virtud a la dificultad que presenta bajo determinadas condiciones para ser resuelta a través de procedimientos numéricos, esto debido a la dispersión numérica que suele presentarse al momento de su resolución.

1.4. Objetivos

1.4.1. *Objetivo General*

Estudiar las propiedades de aproximación de los operadores diferenciales miméticos y su aplicación a un problema de dispersión de ondas acústicas (*Ecuación de Helmholtz*).

1.4.2. *Objetivos Específicos*

1. Analizar la teoría existente de construcción de operadores diferenciales miméticos, por medio de una revisión bibliográfica.
2. Aplicar la metodología de Montilla, Cadenas y Castillo para obtener los operadores diferenciales miméticos de primer orden sobre mallados no-uniformes en 1D utilizando lenguaje simbólico.
3. Realizar un estudio de convergencia para calcular el orden de aproximación de los operadores miméticos obtenidos mediante el uso de polinomios.
4. Resolver un problema de dispersión de ondas acústicas unidimensional (*Ecuación de Helmholtz*) utilizando los operadores obtenidos y calcular el orden de convergencia.
5. Comparar la solución dada por el método matricial mimético con los resultados obtenidos mediante el método de diferencias finitas.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Ecuación de Helmholtz

La gran mayoría de los fenómenos de propagación de ondas en la naturaleza están gobernados por la *Ecuación de Helmholtz*, esta es una ecuación elíptica descrita en derivadas parciales y se deduce a partir de la ecuación de onda que está dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Luego de realizar una cierta manipulación algebraica, la ecuación (2.1) nos conduce a la *Ecuación de Helmholtz* la cual se ve representada mediante la expresión:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} + c^2 \Delta \hat{p} = 0 \quad (2.2)$$

donde \hat{p} es una onda armónica en el tiempo, la cual va a representar la presión y puede ser descompuesta en la suma de la presión de la onda incidente y de la onda esparcida, $\hat{p} = p_{inc} + p_{sca}$, supongamos que \hat{p} genera una respuesta armónica en el tiempo dada por $\hat{p}(x, y, z, t) = p(x, y, z)e^{i\omega t}$, es esta suposición la que nos conducirá a la deducción de la *Ecuación de Helmholtz*.

De la ecuación anterior:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = p(x, y, z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{i\omega t}) \quad (2.3)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{i\omega t}) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial e^{i\omega t}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (i\omega e^{i\omega t}) \\ &= i^2 \omega^2 e^{i\omega t}, \text{ como } i^2 = -1 \\ &= -\omega^2 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

por lo tanto $\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = p(x, y, z)(-\omega^2 e^{i\omega t})$.

Sustituyendo la expresión anterior en (2.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{p} &= \frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p(x, y, z) e^{i\omega t} &= \frac{\omega^2}{c^2} p(x, y, z) e^{i\omega t} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{p(x, y, z)} &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ \left(\Delta^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} \right) p &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

la relación $k = \frac{\omega}{c}$ es conocida como número de onda, ω es la frecuencia temporal, c es la velocidad de onda, y p representa la presión. La ecuación dada por (2.4) es la mencionada *Ecuación de Helmholtz*, los fenómenos gobernados por esta ecuación se encuentran definidos sobre dominios abiertos, lo que al momento de realizar los cálculos computacionales nos obliga a limitar el dominio a una frontera artificial, la cual viene dada por formas geométricas simples (*esferas, círculos, elipses*), las condiciones de frontera para el problema que deseamos resolver están dadas por la combinación de condiciones de frontera tipo *Neuman* y tipo *Dirichlet*. Se debe tener en cuenta que para que el problema resulte bien planteado hay que introducir una condición de borde infinito, la cual es conocida como condición de Sommerfeld, la misma se encuentra definida para cualquier dimensión mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (p' - ikp) = 0$$

Para el caso de $1D$ esta condición está definida por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (p' - ikp) = 0$$

la ecuación anterior nos indica que para el caso unidimensional esta condición es exacta, lo cual se verifica a continuación:

Supongamos una función definida por $p(x) = Ae^{ikx}$ donde $p'(x) = ikAe^{ikx}$

De tal forma que:

$$\begin{aligned} p' - ikp &= 0 \\ ikAe^{ikx} - ikAe^{ikx} &= 0 \end{aligned}$$

de esta forma verificamos que la condición de Sommerfeld es exacta en todo el dominio. Ahora evaluando en el borde izquierdo, tenemos que:

$$p'(1) - ikp(1) = 0$$

De modo que el problema a resolver para la onda esparcida, está dada por el siguiente sistema:

$$p'' + k^2p = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2.5)$$

$$p'(0) = ik \quad (2.6)$$

$$p'(1) - ikp(1) = 0. \quad (2.7)$$

Se desea hallar la solución exacta a la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes representada por (2.5), sujeta a las condiciones de borde (2.6) y (2.7). Para ello se utilizará un procedimiento estándar que permite hallar la resolución de este tipo de ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales de este tipo tiene una solución de la forma $y = y_h + y_p$, dado que (2.5) es homogénea sólo se hallará la función complementaria y_h . Se propone $y = e^{mx}$ como una solución, procediendo por el método básico para la reducción de estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} y &= e^{mx} \\ y'' &= m^2 e^{mx} \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.5), tenemos:

$$\begin{aligned} m^2 e^{mx} + k^2 e^{mx} &= 0 \\ (m^2 + k^2) e^{mx} &= 0 \end{aligned}$$

donde la expresión $m^2 + k^2 = 0$ es conocida como ecuación característica o polinomio característico y del mismo obtendremos que $m = \sqrt{-k^2} \Rightarrow m = \pm ik$

De esta forma obtenemos dos soluciones para *Ecuación de Helmholtz*, dadas por:

$$y_1 = e^{ikx} \quad (2.8)$$

$$y_2 = e^{-ikx} \quad (2.9)$$

Así se obtiene

$$y = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.10)$$

Deseamos conocer los valores de las constantes A y B para ello haremos uso de las condiciones mencionadas en (2.6) y (2.7). Haciendo uso de (2.6)

$$p'_{sc}(0) = ik$$

Así

$$\begin{aligned} y' &= ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx} = ik \\ y'(0) &= ikA - ikB = ik \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ahora usando (2.11) tenemos:

$$\begin{aligned} p'(1) - ikp(1) &= 0 \\ y'(x) &= ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx} \\ y'(1) &= ikAe^{ik} - ikB^{-ik} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p'(1) - ikp(1) &= ikAe^{ik} - ikB^{-ik} - ik(Ae^{ik} + Be^{-ik}) = 0 \\ &= ikAe^{ik} - ikBe^{-ik} - ikAe^{ik} - ikBe^{-ik} = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad -2ikBe^{-ik} = 0. \end{aligned}$$

Así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$ikA - ikB = ik \tag{2.12}$$

$$-2ikBe^{-ik} = 0. \tag{2.13}$$

Dado que $k > 0$, por (2.13) tenemos que $B = 0$, y sustituyendo el valor de B en (2.12) se obtiene que:

$$ikA - ik(0) = ik \tag{2.14}$$

$$ikA = ik \tag{2.15}$$

$$A = 1. \tag{2.16}$$

De esta forma la solución general para la *Ecuación de Helmholtz* está dada por:

$$y = e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx). \tag{2.17}$$

2.2. Método de Diferencias Finitas

El método de *Diferencias Finitas* es un método cuyo objetivo es construir esquemas que permitan resolver de forma aproximada sistemas de ecuaciones

diferenciales. La idea básica es reemplazar las derivadas por diferencias finitas. Existen muchos métodos a través de los cuales se pueden obtener diferencias finitas para aproximar derivadas, entre los más conocidos se encuentran series de Taylor y polinomios de Interpolación de Lagrange.

El método de *Diferencias Finitas* se puede resumir esencialmente en las siguientes etapas:

- El dominio continuo, ya sea un intervalo, un rectángulo, un elemento de volumen o un dominio arbitrario de forma irregular; se reemplaza por un conjunto discreto de puntos (nodos). A este conjunto se le llama malla.
- En lugar de funciones con argumentos continuos, se considera una función con argumentos discretos. Los valores de estas funciones son definidos en los nodos de la malla o en cualquier otro elemento de éste (pudiendo ser en las celdas, cuyos vértices están en los nodos). Esta función se le denomina función de malla.
- Todas las derivadas de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera son aproximadas por expresiones en diferencia. En consecuencia, el problema es transformado en un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuaciones de mallado o en diferencia) lineal o no lineal.

Para tener más detalles sobre este aspecto se puede ver el libro [15].

2.3. Conceptos Básicos

Para el entendimiento y desarrollo de estos métodos, es necesario el dominio de cierta terminología matemática, la cual juega un papel fundamental a lo largo del desarrollo de este trabajo. En las líneas que se presentan a continuación son brevemente explicados los términos más utilizados.

2.3.1. *Mallados*

Para la definición de mallados, consideremos sin pérdida de generalidad el intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} , ya que todo intervalo de la forma (a, b) es isomorfo a $[0, 1]$, realizemos una partición de $N + 1$ puntos, a los que denominaremos nodos y serán representados por: $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N + 1\}$.

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N < x_{N+1} = 1 \quad (2.18)$$

Estos $N + 1$ nodos particionan a la vez el intervalo $[0, 1]$ en N celdas:

$$\{(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N - 1, N\}$$

Ahora, si cada celda difiere en tamaño (longitud), es denominado *mallado no-uniforme*. Si por el contrario todas las celdas tienen un mismo tamaño, *mallado uniforme*.

Para el caso no uniforme, se asume que existen constantes $C_{m\acute{a}x}$ y $C_{m\acute{i}n}$ que son independientes del parámetro h , donde $h = \frac{b-a}{N}$ y este tiende a cero cuando el número de nodos se incrementa, tal que:

$$hC_{m\acute{i}n} < x_{i+1} - x_i < hC_{m\acute{a}x} \quad (2.19)$$

La suposición anterior es denominada *regularidad*. Si un mallado no-uniforme es regular, está caracterizado por el parámetro h y las dos constantes antes mencionadas.

Mallados Suaves y Mallados No-Suaves

Para una aplicación práctica es importante conocer las diferencias entre los tipos de mallados no-uniformes.

El primer tipo de mallado no-uniforme que encontramos es el *Mallado Suave*. Para comprender esta definición, considéremos la función suave $x = x(t)$ definida del segmento $[0, 1]$ en sí mismo. Esta transformación debe ser inyectiva. En el caso unidimensional es suficiente que la función x sea monótona creciente.

Supongamos que en el intervalo $[0, 1]$ se hace una partición uniforme con nodos dados por $t_i = \frac{i-1}{N-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Bajo estas condiciones, el mallado $\{x_i : i = 1, 2, \dots, N + 1\}$ sobre el intervalo $[0, 1]$, se denomina *mallado suave* sí y sólo sí las coordenadas en cada nodo son dadas por la función:

$$x = x(t)$$

donde la función $x(t)$ es una función suave o lisa.

Se nota claramente que para obtener un mallado no-uniforme suave (ver figura ??), en primer lugar se debe definir un mallado uniforme y una función suave $x(t)$ que se evalúa sobre esta variable (debemos notar que el espacio de la variable t usualmente se le llama **espacio lógico** y el de la variable x **espacio físico**).

El mallado no-suave es aquel que no se puede construir mediante una transformación suave. Como por ejemplo (observar la figura 2.2), si se considera el mallado no-uniforme donde la longitud entre cada nodo varía alternativamente $2h, h, 2h, \dots$. Para estos tipos de mallado se asume que se cumple la condición de regularidad.

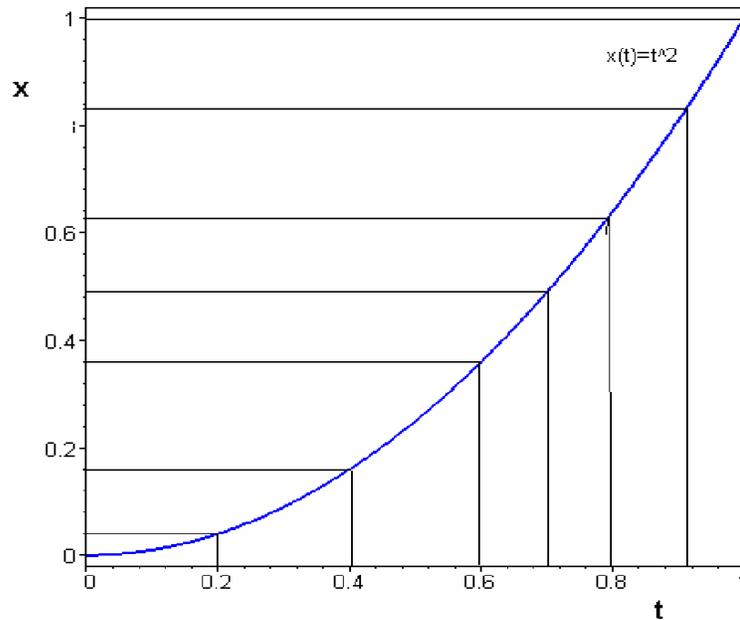


Figura 2.1: Mallado No-uniforme Suave

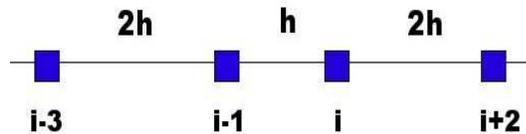


Figura 2.2: Mallado No Uniforme No Suave

Mallado Intercalado

Un mallado intercalado no-uniforme consiste en dos conjuntos de puntos, como se observar en la figura 2.3. Uno identificado con números enteros y el otro identificado con números racionales de denominador dos (puntos medios). De tal forma que si N es un entero positivo, entonces un mallado intercalado de tamaño N en el intervalo $[a, b]$, posee $N + 1$ puntos x_i , donde $i = 1, 2, \dots, N + 1$, con $x_1 = a$ y $x_{N+1} = b$. El otro conjunto consta de N puntos $x_{i+\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Los puntos deben satisfacer la desigualdad $x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, N$.

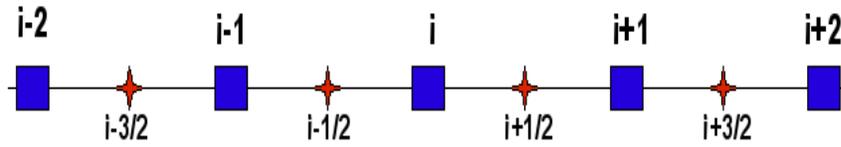


Figura 2.3: Mallado Intercalado

2.3.2. Funciones Discretas

Dado un mallado intercalado, se puede definir sobre el mismo dos tipos de funciones para argumentos discretos. En un primer caso, los valores de la función corresponden a los nodos (ver figura 2.4). Esta es denominada una **discretización nodal**. En este caso la función de malla es un conjunto (o vector) de N números (componentes):

$$\mathbf{v} = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

El conjunto de todas las funciones \mathbf{v} de malla de discretización nodal se denomina como \mathbb{H}_N .

Para identificar este tipo de funciones, se usan las letras u , v , w , etc.

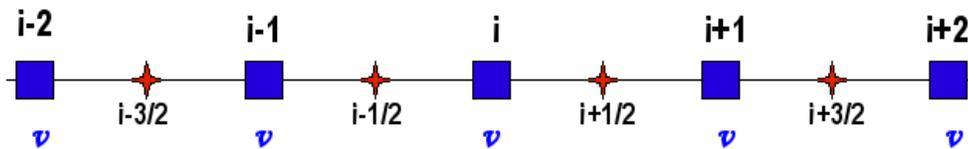


Figura 2.4: Función Nodal

Por otra parte, si los valores de la función \mathbf{f} discreta de malla son obtenidos sobre algún punto de la celda (ver figura 2.5), entonces ésta es una **discretización celda-valuada**. Sin embargo, para este caso el valor de la función no corresponde

a un punto específico de la celda, sino que se considera la celda como un todo geométrico. Para denotar este tipo de funciones se usarán los puntos medios y el conjunto de todas estas funciones se llama \mathbb{HC} .

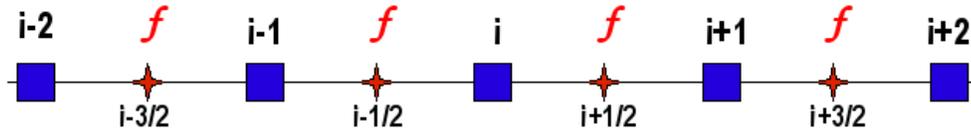


Figura 2.5: **Función Celda-Valuada**

Si no se requiere discriminar entre ambos tipos de funciones de malla, entonces se puede escribir que $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$, o $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$. Aquí \mathbb{H} representa el conjunto de todas las funciones discretas.

Estas notaciones se utilizan para identificar los tipos de funciones discretas, ya que en ordenes superiores las primeras corresponden a una discretización de campos vectoriales y las segundas a una discretización de campos escalares.

2.3.3. *Matriz Centrosimétrica*

La matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) es centrosimétrica sí y solo sí existen matrices de permutación P_m y P_n , tal que $A = P_m A P_n$.

2.3.4. *Matriz Anticentrosimétrica*

La matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) es anticentrosimétrica sí y solo sí existen matrices de permutación P_m y P_n , tal que $A = -P_m A P_n$, ver [16].

2.3.5. *Matriz con Estructura tipo Toeplitz*

Una matriz A tiene estructura tipo *Toeplitz* si sus entradas no nulas en la fila $i + 1$, son justo las entradas no nulas de la fila i desplazada una columna hacia la derecha. Por ejemplo, sea A una matriz tipo *Toeplitz* de dimensión 4×5 , donde la primera fila de A viene dada por los elementos $a_{11} = x_1$, $a_{12} = x_2$, $a_{13} = x_3$, $a_{14} = x_4$, $a_{15} = x_5$, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

2.3.6. *Ecuación de Onda Unidimensional*

Es una ecuación hiperbólica escrita en derivadas parciales, que describe fenómenos relativos a la propagación de onda en un medio continuo.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.20)$$

Detalles sobre la ecuación de onda se pueden leer en el Apéndice [A](#).

2.3.7. *Condiciones de Frontera*

Las condiciones de frontera están asociadas a variables que representan alguna dimensión espacial y que se hallan restringidas a una cierta región Ω . Si la ecuación en derivadas parciales es de segundo orden, va a ser necesario conocer el valor de

la solución, de su derivada o de una combinación lineal de ellas, en la frontera ($\partial\Omega$) de la región conocida. Se consideran tres tipos de condiciones de frontera:

1. **Condición de Dirichlet:** es aquella donde se determina el valor de la solución en la frontera y suele representarse como:

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t)$$

2. **Condición de Neumann:** es aquella donde se determina el valor de la frontera según la dirección normal de la solución en la frontera, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t)$$

3. **Condiciones de Robin:** esta condición también es conocida como condición mixta, ya que la misma es una combinación lineal de las dos anteriores:

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} + k \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t)|_{\partial\Omega} = g(t), \quad (k \in \mathbb{R})$$

x representa el conjunto de las variables que definen la región Ω del espacio.

2.4. Método Castillo-Grone:

Este método describe como construir discretizaciones miméticas de los operadores *Divergencia* y *Gradiente*, la técnica empleada se fundamenta en la formulación matricial para calcular los operadores discretos que tienen igual orden de aproximación, tanto en el interior del mallado como en su frontera, estos investigadores describen como obtener los operadores discretos en una dimensión para mallados intercalados uniformes para órdenes superiores, como se cita en [3].

2.4.1. Esquema de Discretización Mimética

Los operadores diferenciales obtenidos bajo esta metodología satisfacen una ley de conservación global y al igual que el método de operadores de referencia o soporte se requiere construir operadores discretos miméticos que satisfagan la identidad integral:

$$\int_V f \operatorname{div}(\vec{v}) dV + \int_V (\vec{v}, \operatorname{grad}(f)) dV = \oint_S f(\vec{v}, \vec{n}) dS \quad (2.21)$$

Donde V es un volumen arbitrario con frontera S y el vector unitario normal \vec{n} exterior a S , f es una función escalar arbitraria, \vec{v} es una función vectorial arbitraria.

Los operadores involucrados en la ecuación anterior poseen tres ideas estrechamente relacionadas (*Teorema de la Divergencia, la Conservación Local y la Conservación Global*). La conservación local es un caso especial del *Teorema de la Divergencia Generalizada*, tomando $\mathbf{f} \equiv 1$ y a V como una celda sencilla. En cambio, la conservación global es (2.21) con $\mathbf{f} \equiv 1$ aplicada a toda la región en consideración.

Para el caso unidimensional y específicamente para $V = [0, 1]$ la identidad (2.21) se convierte en la conocida regla de integración por parte

$$\int_0^1 f \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 \frac{df}{dx} v dx = v(1)f(1) - v(0)f(0) \quad (2.22)$$

En algunas aplicaciones, tales como, las leyes de conservación hiperbólica, el Gradiente no es necesario que sea conservativo; pero para la Divergencia vamos a requerir que sea conservativa; es decir, que la fórmula de integración por partes se satisfaga en (2.22) para $\mathbf{f} \equiv 1$ o que para el caso unidimensional la ecuación (2.22) se convierte en:

$$\int_0^1 v' dx = \int_0^1 \frac{dv}{dx} = v(1) - v(0), \text{ si } f \equiv 1 \quad (2.23)$$

Para el desarrollo del método se define un mallado intercalado uniforme, con $h = \frac{1}{N}$, nodos $x_i = (i - 1)h$, $1 \leq i \leq n$ y celdas (x_i, x_{i+1}) con centros en $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Consideremos las funciones discretas \mathbf{f} y \mathbf{v} , donde $\mathbf{f} \in \mathbb{HC}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{HN}$. Es decir, \mathbf{f} tiene una discretización celda-valuada (puntos medios) y \mathbf{v} tiene una discretización nodal (puntos enteros).

El operador de Divergencia discreta \mathcal{D} actuará sobre los valores de \mathbf{v} , mientras que el Gradiente discreto \mathcal{G} lo hará sobre los valores de \mathbf{f} , como se observa en la figura 2.6.

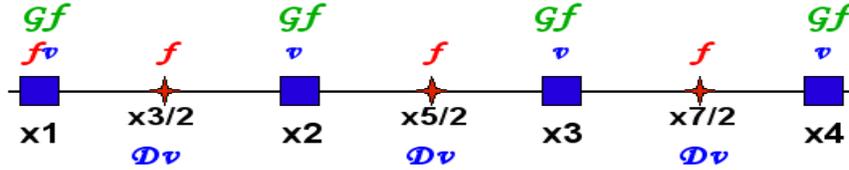


Figura 2.6: Operadores Discretos

Bajo estas condiciones el operador de Divergencia discreta más simple está dado por:

$$\left(\mathcal{D}_x(\mathbf{v})\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i}{h}, \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad (2.24)$$

y el Gradiente Discreto es definido a su vez por:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_x(\mathbf{f}))_1 &= \frac{\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1}{0,5h}, & i = 1 \\
(\mathcal{G}_x(\mathbf{f}))_i &= \frac{\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}}{h}, & 2 \leq i \leq N \\
(\mathcal{G}_x(\mathbf{f}))_N &= \frac{\mathbf{f}_N - \mathbf{f}_{N-\frac{1}{2}}}{0,5h} & i = N + 1
\end{aligned} \tag{2.25}$$

El operador de Divergencia descrito anteriormente tiene orden dos, mientras que el Gradiente es de orden dos en el interior y de primer orden en la frontera, por lo tanto es necesario establecer condiciones para que tenga igual orden de aproximación en todo el mallado.

Cuando se usa un mallado intercalado uniforme el operador \mathcal{D} se puede interpretar como una matriz de $N - 1$ filas y N columnas,

La Divergencia de los campos vectoriales es nula ($Dv = 0, v \equiv 1$), si $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ una N -upla, al premultiplicarla con \mathcal{D} se debe cumplir que:

$$\mathcal{D}\mathbf{e} = 0$$

Esta condición equivale a la propiedad de la derivada de anular las funciones constantes. Esta al igual que algunas otras condiciones son propiedades deseadas para la matriz de Divergencia \mathcal{D} , a continuación se presenta las propiedades deseadas:

1. \mathcal{D} tiene suma de filas cero, o de forma equivalente $(\mathbf{e}, \mathcal{D}^t) = \mathcal{D}\mathbf{e} = 0$, donde $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^t$.
2. \mathcal{D} tiene suma de columnas $-1, 0, \dots, 0, 1$, o de forma equivalente $(\mathcal{D}, \mathbf{e}) = \mathbf{e}^t \mathcal{D} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.

3. \mathcal{D} es una matriz en banda (b denota el ancho de banda de \mathcal{D}).
4. \mathcal{D} tiene una estructura tipo Toeplitz en la filas interiores, y es definida independiente de N (el número de puntos del mallado), si $N \geq 3b - 1$.
5. \mathcal{D} es simétrica centro inclinada: $\mathcal{D} = -P_N \mathcal{D} P_{N+1}$

Ahora, conocidas las condiciones requeridas se trata de obtener las matrices deseadas para los operadores. El método de *Castillo-Grone* [3] se resume en lo siguientes pasos:

1. Se construye una matriz \mathbf{S} , la cual se va a llamar *matriz generadora natural*, dicha matriz se obtiene usando polinomios de Lagrange y se le imponen las condiciones requeridas por la matriz \mathcal{D} , esta matriz se convierte en candidata para convertirse en la matriz de Divergencia mimética deseada, para ello \mathbf{S} deberá sufrir algunas modificaciones. Para estas modificaciones se aplica el siguiente criterio:

Criterio: Sean k y $\frac{3k}{2}$ enteros no negativos fijos y A la matriz de dimensión $k \times \frac{3k}{2}$. La matriz modificada \mathbf{S} se obtendrá al reemplazar las primeras k filas de \mathbf{S} por una matriz de orden $k \times (N + 1)$.

2. Las nuevas entradas de \mathbf{S} se encuentran mediante un sistema de ecuaciones $\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r}$, donde \mathbf{M} va a estar definido por matrices de Vandermonde, \mathbf{a} va a ser un vector definido por las entradas de la matriz \mathbf{a} , esta matriz va a ser la matriz usada para la modificación realizada en las filas de \mathbf{S} y \mathbf{r} va a tener dimensiones de acuerdo al número de filas de \mathbf{M}

Para un mayor estudio del método se recomienda ver [1].

En el caso que se use el producto interno usual el problema de encontrar una versión discreta del Gradiente es equivalente a encontrar una versión discreta de la Divergencia.

Sea \mathcal{D} una matriz $N \times (N + 1)$, versión discreta de la Divergencia, $\widehat{\mathcal{D}}$ es la matriz \mathcal{D} aumentada en dos filas de ceros, la primera y la última fila. Además, sea \mathcal{G} una matriz $(N + 1) \times (N + 2)$, versión discreta del Gradiente. Si \mathbf{v} es una $(N - \text{upla})$, \mathbf{f} , es decir, $(\mathbf{f}_{\frac{3}{2}}, \mathbf{f}_{\frac{5}{2}}, \dots, \mathbf{f}_{N-\frac{1}{2}})$ y $\widehat{\mathbf{f}}$, es \mathbf{f} aumentada con los puntos \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_N agregados en sus extremos, tal que, $\widehat{\mathbf{f}}$ es una $(N + 1)$ -upla. Para estos objetos, la identidad integral (2.22) en términos del producto interno usual, da la siguiente versión discreta:

$$\left(\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}}\right) + \left(\mathbf{v}, \mathcal{G}(\widehat{\mathbf{f}})\right) = \mathbf{v}_N \mathbf{f}_N - \mathbf{v}_1 \mathbf{f}_1 \quad (2.26)$$

O de forma equivalente:

$$\left(\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}}\right) + \left(\mathcal{G}^t(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}}\right) = \left(\mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}}\right) \quad (2.27)$$

Donde \mathbf{B} es una matriz $(N + 2) \times (N + 1)$, que asume los requerimientos de verificación del teorema de la divergencia discreta, a tal efecto \mathbf{B} toma la forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para un mayor entendimiento sobre el cálculo de \mathbf{B} ver [13]

2.5. Método Montilla-Cadenas-Castillo(MCC):

Este método se basa en el trabajo realizado por *Castillo-Grone* [3] y realiza una extensión para mallados no-uniformes. *Montilla, Cadenas y Castillo* [1] presentan una forma general para la obtención de las matrices de *Vandermonde* necesarias para la construcción de los operadores *Divergencia y Gradiente* miméticos. En las líneas siguientes daremos a conocer los pasos descritos en esta metodología.

Dado un mallado intercalado uniforme (2.3.1) se puede obtener dos aproximaciones para la primera derivada, las cuales son llamadas *Divergencia y Gradiente*, y se utilizan los nodos y las celdas del mallado respectivamente para efectuar la aproximación de la derivada.

Supongamos que se desea obtener el operador Divergencia, para ello se construye una matriz de Divergencia \mathbf{S} , usando una fórmula de aproximación de la derivada de acuerdo al orden deseado, la misma es obtenida utilizando los polinomios de Lagrange, por ejemplo para un orden $k = 4$ la fórmula a utilizar es :

$$\frac{1}{24}[0, 0, \dots, 0, 1, -27, 27, -1, 0, \dots, 0, 0] \quad (2.29)$$

Las filas interiores de \mathbf{S} serán definidas por la expresión (2.29), la construcción de dicha matriz es bastante sencilla, cada una de sus filas aproxima la derivada en una celda del mallado y se hace de manera tal que satisfaga las siguientes propiedades:

1. Tiene dimensiones $N \times (N + 1)$, donde N representa el número de celdas del mallado intercalado.
2. \mathbf{S} tiene suma de filas cero.

3. \mathbf{S} tiene suma de columnas $-1, 0, \dots, 0, 1$.
4. Es una matriz en banda ($b = k$ denota el ancho de banda de \mathbf{S}).
5. \mathbf{S} tiene una estructura tipo Toeplitz en la filas interiores, y es definida independiente de N (el número de puntos del mallado) si $N \geq 3b - 1$.
6. \mathbf{S} es una matriz anticentrosimétrica.

La matriz \mathbf{S} cumple con el orden deseado en el interior del mallado, pero en la frontera es de orden menor, por lo que es necesario transformar a \mathbf{S} de forma tal que posea igual orden en la frontera, para lograrlo se utiliza el siguiente criterio, para transformar \mathbf{S} de forma adecuada.

Criterio: Sean k y $\frac{3k}{2}$, donde k es el orden de aproximación deseado, enteros no negativos fijos y A la matriz de dimensión $k \times \frac{3k}{2}$. La matriz modificada \mathbf{S} se obtendrá al reemplazar las primeras k filas de \mathbf{S} por una matriz de orden $k \times N$.

Las últimas filas de \mathbf{S} quedarán modificadas por la matriz A' , donde:

$$A' = -P_k A P_{\frac{3k}{2}} \quad (2.30)$$

El bloque matricial sustitutivo superior, quedará como sigue:

$$[A \quad 0]$$

En forma análoga el bloque inferior, pero es suficiente trabajar la parte superior por ser A' una matriz anticentrosimétrica (ver definición 2.3.4). En lo que respecta al número de columnas de A se espera sea pequeño comparado con b (ancho de banda) e independiente de N . Para aplicar la metodología, es suficiente exigir que

A tenga orden $k \times \frac{3k}{2}$. Para que la técnica sea útil, se requiere que k sea función sólo de b y no de N . Para ello es suficiente hacer $k = b$.

Desde aquí en adelante se considerará k un número par, se asumirá $b = k$ y $N \leq 3k - 1$, esto para evitar el solapamiento, la nueva matriz obtenida se le denominará $\mathcal{D}(A)$.

Ahora, el problema se traduce en encontrar dicha matriz A . Para la cual, se plantea un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r}$, donde las incógnitas (vector \mathbf{a}) son los elementos de la matriz A , la matriz \mathbf{M} es una matriz en bloques conformada por matrices de *Vandermonde*, matrices nulas e identidades, y el vector \mathbf{r} es elegido, tal que se cumplan las condiciones miméticas (*Teorema de la Divergencia Generalizada*).

El problema de obtener la matriz A , se reduce a construir \mathbf{M} para poder resolver el sistema $\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r}$, es decir, la matriz de coeficientes. Para tal fin, deben conseguirse tantas matrices de *Vandermonde* como sea el orden deseado k . La información referente a estas matrices está dada por la expresión $2i + 1 - 2j$, con $i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 1, 2, \dots, \frac{3k}{2}$, por ejemplo para $k = 2$ las matrices de *Vandermonde* son:

$$V_1 = V(2; 1, -1, -3) \quad \text{y} \quad V_2 = V(2; 3, 1, -1)$$

A su vez, cada una de estas k matrices garantizan la exactitud de la aproximación de la derivada para polinomios de grado n con $n \leq k$.

Montilla, Cadenas y Castillo obtuvieron una fórmula para estas matrices que difiere de la suministrada por *Castillo-Grone*, sin embargo, las entradas deseadas son las mismas, la clave para llegar a este resultado fue escoger una función de prueba adecuada, en este caso como se desea conseguir aproximaciones de la derivada que sean exactas para polinomios de grado menor o igual que k (k es

el orden de truncamiento) se espera que la función de prueba adecuada tenga una estructura polinomial. Para mayores detalles sobre el método se puede ver [1].

2.6. Método MCC sobre Mallados No-Uniformes:

En esta sección se dará a conocer el procedimiento para la obtención de los Operadores Diferenciales Miméticos presentados por Montilla-Cadenas-Castillo para el caso de Mallados No-Uniformes.

Para el caso No-Uniforme se considera como dominio de la variable x el intervalo $x_1 \leq x \leq x_{N+1}$. Sobre este intervalo se efectuará una partición con $N + 1$ nodos, generando un mallado no-uniforme con N celdas. Al igual que en el caso uniforme los nodos sean identificados por puntos x_i , $i = 1, \dots, N + 1$ y las celdas por puntos $(x_{i+1/2})$ que denominaremos puntos medios.

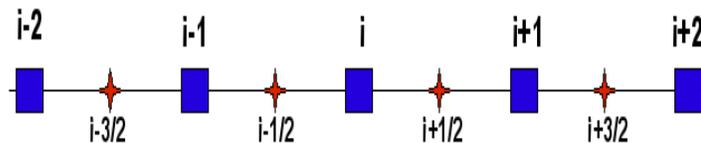


Figura 2.7: Mallado Intercalado

Sobre este llamado definiremos dos tipos de funciones para argumentos discretos. En un primer caso, los valores de la función corresponden a los nodos, ésta es denominada *función nodal* f . El segundo tipo de función es una discretización *celda-evaluada* v , donde los valores de la función corresponden a las celdas.

En el método desarrollado por Castillo-Grone [3], se construyen los operadores discretos dándole solución al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.31)$$

donde \mathbf{M} es una matriz en bloques de $k(k+1) + \frac{3}{2}k$ filas y $\frac{3}{2}k^2$ columnas, conformada por matrices de Vandermonde y matrices identidades como entrada, en donde \mathbf{a} es el vector de incógnitas, que conforman las entradas de la matriz A (ver [13]) y \mathbf{r} es un vector que está determinado por las condiciones miméticas. El operador \mathbf{a} de incógnitas cumple con los requerimientos necesarios para los operadores miméticos (suma de filas, condición de suma de columnas y la exigencia del orden). Para la obtención de los operadores se requiere de la construcción de una matriz \mathbf{S} , esta matriz es modificada en sus k filas y las $\frac{3}{2}k$ columnas por una matriz A formada por las incógnitas de el vector \mathbf{a} . Esta matriz \mathbf{S} tiene dimensión $N \times (N+1)$, para el operador que denominaremos \mathcal{D} y satisface las condiciones de mimeticidad señaladas en la sección 2.5

2.6.1. Divergencia Mimética No-Uniforme

Para un Divergencia de orden $k = 2$, el mínimo número de celdas es $N = 5$, la matriz \mathbf{S}_D propuesta para la Divergencia sobre mallados no-uniformes es la siguiente:

$$\mathbf{S}_D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_3-x_2} & \frac{1}{x_3-x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_4-x_3} & \frac{1}{x_4-x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_5-x_4} & \frac{1}{x_5-x_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_6-x_5} & \frac{1}{x_6-x_5} \end{pmatrix}$$

Las primeras k filas y las $\frac{3}{2}k$ columnas de \mathbf{S}_D quedan modificadas por una matriz A de dimensión $k \times \frac{3}{2}k$ como se dijo anteriormente. Análogamente al caso uniforme la nueva matriz se denominara $\mathcal{D}(A)$ y se espera que el número de columnas de A sea pequeño comparado con $b = k$ e independiente de N . Es importante recordar que k es el orden de aproximación del operador y el ancho de banda de S en sus filas interiores, de aquí en adelante asumiremos k par y $b = k$ y $N \leq 3k - 1$. Esto

para asegurarnos que no exista solapamiento entre las filas. Nuevamente la clave para obtener la matriz $D(A)$ consiste en conseguir las entradas de la matriz A y por lo tanto definiremos un sistema lineal como el presentado en (2.31).

Una vez más lo interesante del problema está en la construcción de la matriz \mathbf{M} , la cual está conformada por las matrices de Vandermonde y matrices identidades. \mathbf{M} tendrá $\frac{3}{2}k^2$ columnas ya que esta tiene que coincidir obviamente, con el número de elementos del vector \mathbf{a} . Dichas matrices de Vandermonde se obtienen a través de ciertas funciones de prueba adecuadas para la Divergencia y el Gradiente respectivamente, la construcción de dichas matrices se pueden ver con detenimiento en [1], para el caso no-uniforme las entradas de las matrices de Vandermonde para la Divergencia y el Gradiente están dadas por las siguientes expresiones:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3}{2}k} a_{ij}(x_j - x_{i+\frac{1}{2}})^n = \delta_{1n}; i = 1, \dots, k \quad (2.32)$$

$$a_{i1}(x_1 - x_i)^n + \sum_{j=2}^{\frac{3}{2}k} a_{ij}(x_{j-\frac{1}{2}} - x_i)^n = \delta_{1n}; i = 1, \dots, k \quad (2.33)$$

En las expresiones anteriores n toma valores comprendidos entre 0 y k y δ_{1n} es la conocida delta de Kronecker representada por:

$$\delta_{1n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

Las matrices de Vandermonde tendrán las siguientes características:

- Como el orden del operador es k , se toma naturalmente $m = k$, donde m va a ser el número de matrices de Vandermonde que va a tener \mathbf{M} . Estas

matrices serán de dimensión $(k + 1) \times (\frac{3}{2}k)$ y tomará las primeras $k + 1$ potencias para los x_i , $i = 1, \dots, n$.

- La primera fila de cada matriz de Vandermonde debe satisfacer la condición de suma de filas de $\mathcal{D}(A)$, es decir, que el operador, en efecto, se anule cuando sea aplicado a funciones constantes.

En cuanto a \mathbf{r} su tamaño coincidirá con el número de filas de \mathbf{M} y estará conformada por vectores \mathbf{c} de tamaño $k + 1$ y tendremos tantos vectores \mathbf{c} , como matrices de Vandermonde, las últimas $\frac{3}{2}k$ filas de \mathbf{r} están dadas por el vector \mathcal{D} cuya escogencia está regida por la condición de suma de columnas para $\mathcal{D}(A)$, para que se satisfaga el *Teorema de la Divergencia Discreto* (análogo al continuo).

Para $k = 2$ y un mallado no-uniforme dicha matriz \mathbf{M} tendrá la siguiente estructura:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{x_1 - x_2}{2}) & (\frac{x_2 - x_1}{2}) & (x_3 - \frac{x_1 - x_2}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{x_1 - x_2}{2})^2 & (\frac{x_2 - x_1}{2})^2 & (x_3 - \frac{x_1 - x_2}{2})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (x_1 - \frac{x_1 - x_3}{2}) & (\frac{x_2 - x_3}{2}) & (\frac{x_3 - x_2}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & (x_1 - \frac{x_1 - x_3}{2})^2 & (\frac{x_2 - x_3}{2})^2 & (\frac{x_3 - x_2}{2})^2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector de términos independientes \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)^t$$

Este sistema es incompatible por lo tanto se debe eliminar la segunda y la quinta fila, para hacerlo determinado. La solución de este sistema es:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero estos no son los valores buscados para la matriz A , por lo tanto procederemos a calcular la matriz de pesos Λ , donde Λ es una matriz $k \times k$ definida positiva y $\Lambda' = P_k \Lambda P_k$ y forman la diagonal de la matriz de peso para la Divergencia Q , la cuál es una matriz centro simétrica y es de la forma:

$$Q = \Lambda \otimes I_{N-2k} \otimes \Lambda'$$

Para la obtención de Λ haremos uso de las filas eliminadas de la matriz \mathbf{M} y el vector \hat{a} solución del sistema $\mathbf{M} \hat{a} = \hat{\mathbf{r}}$ conocido como sistema reducido, mediante la expresión:

$$\hat{\Lambda} = \mathbf{M}_w \hat{a}; \quad \mathbf{M}_w = \{ \text{filas eliminadas de } \mathbf{M} \}$$

Así,

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz A buscada, premultiplamos a \hat{A} con la inversa de la matriz \hat{Q} ($A = \hat{Q}^{-1} \hat{A}$), el resultado es:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_3 - x_2} & \frac{1}{x_3 - x_2} \end{pmatrix}$$

De modo tal que nuestra matriz $\mathcal{D}(A)$ tiene las primeras filas iguales a $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$, sin embargo, las dos últimas filas de esta matriz cambian por la estructura que tiene A' ver (2.30)

$$\mathcal{D}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_3-x_2} & \frac{1}{x_3-x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_4-x_3} & \frac{1}{x_4-x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_3-x_2} & \frac{1}{x_3-x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Para el caso de $N = 9$ nuestra matriz de Divergencia no-uniforme presentará la siguiente estructura:

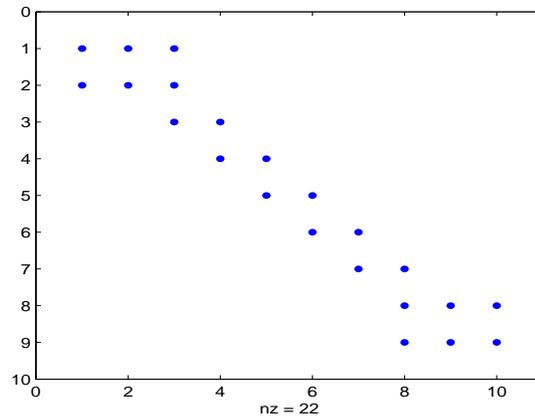


Figura 2.8: Divergencia No-Uniforme $N = 9$

2.6.2. Gradiente Mimético No-Uniforme

Para la obtención del operador Gradiente se procede de manera análoga a la que se utilizó para el cálculo de la Divergencia, salvo que las entradas de las matrices de

Vandermonde cambian por la naturaleza de las funciones de prueba, la estructura que define las entradas de las matrices de Vandermonde se muestra en (2.33).

Si ahora se usa la fórmula de aproximación para el Gradiente dada en (2.25), y tomando en cuenta que el mallado es no-uniforme, tendremos que nuestra matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$ tendrá una estructura como la que se presenta más abajo. Para un $N = 5$, el Gradiente matricial tiene entonces para un mallado intercalado seis filas y siete columnas, esto en virtud a que se incorporan los nodos de la frontera.

$$\mathbf{S}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x_{\frac{3}{2}}-x_1} & \frac{2}{x_{\frac{3}{2}}-x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_{\frac{5}{2}}-x_{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{x_{\frac{5}{2}}-x_{\frac{3}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_{\frac{7}{2}}-x_{\frac{5}{2}}} & \frac{1}{x_{\frac{7}{2}}-x_{\frac{5}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{\frac{9}{2}}-x_{\frac{7}{2}}} & \frac{1}{x_{\frac{9}{2}}-x_{\frac{7}{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x_{\frac{11}{2}}-x_{\frac{9}{2}}} & \frac{1}{x_{\frac{11}{2}}-x_{\frac{9}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{x_6-x_{\frac{11}{2}}} & \frac{2}{x_6-x_{\frac{11}{2}}} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Análogamente que en el cálculo de la Divergencia, las primeras k filas y las $\frac{3}{2}k$ columnas de $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$ quedan modificadas por una matriz A y para la obtención de sus entradas se resuelve un sistema como el presentado en (2.31), en este caso la estructura de las matrices de Vandermonde para el Gradiente vienen dadas por la expresión presentada en (2.33). Así, el sistema lineal que se debe resolver tiene la siguiente matriz de \mathbf{M} de coeficientes:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{\frac{3}{2}} - x_1 & x_{\frac{5}{2}} - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x_{\frac{3}{2}} - x_1)^2 & (x_{\frac{5}{2}} - x_1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 - 2x_{\frac{3}{2}} & -x_{\frac{3}{2}} + x_1 & x_{\frac{5}{2}} - 2x_{\frac{3}{2}} + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & (2x_1 - 2x_{\frac{3}{2}})^2 & (-x_{\frac{3}{2}} + x_1)^2 & (x_{\frac{5}{2}} - 2x_{\frac{3}{2}} + x_1)^2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el Gradiente opera sobre funciones definidas en los puntos medios (celdas-
valuadas), como $x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}$, el cambio adecuado es:

$$x_2 = 2x_{\frac{3}{2}} - x_1; \quad x_3 = 2x_{\frac{5}{2}} - x_2.$$

Y el vector de términos independientes \mathbf{r} es el mismo que el de la Divergencia:

$$\mathbf{r} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)^t$$

Como el sistema es incompatible se eliminan la segunda y quinta fila de \mathbf{M} . La
solución del sistema reducido nos proporciona la matriz \hat{A} , cada uno de sus seis
elementos viene dado por:

$$a_{11} = \frac{11x_1x_{\frac{3}{2}} - 6x_1^2 - 4x_{\frac{3}{2}}^2 - 3x_{\frac{5}{2}}x_{\frac{3}{2}} + x_{\frac{5}{2}}^2 + x_{\frac{5}{2}}x_1}{4(x_{\frac{3}{2}}^2 - 2x_1x_{\frac{3}{2}} + x_1^2)}$$

$$a_{12} = \frac{x_{\frac{5}{2}}^3 + x_{\frac{5}{2}}^2x_1 - 5x_{\frac{5}{2}}x_1^2 + 3x_1^3 - 4x_{\frac{5}{2}}^2x_{\frac{3}{2}} + 8x_{\frac{5}{2}}x_1x_{\frac{3}{2}} - 4x_1^2x_{\frac{3}{2}}}{4\left(x_{\frac{3}{2}}^2 - 2x_1x_{\frac{3}{2}} + x_1^2\right)\left(-x_{\frac{5}{2}} + x_{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$a_{13} = \frac{-x_{\frac{5}{2}} + 4x_{\frac{3}{2}} - 3x_1}{4\left(-x_{\frac{5}{2}} + x_{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$a_{21} = \frac{-3x_1x_{\frac{3}{2}} + 3x_{\frac{5}{2}}x_{\frac{3}{2}} - x_{\frac{5}{2}}^2 - x_{\frac{5}{2}}x_1 + 2x_1^2}{4\left(x_{\frac{3}{2}}^2 - 2x_1x_{\frac{3}{2}} + x_1^2\right)}$$

$$a_{22} = \frac{-x_{\frac{5}{2}}^3 - x_{\frac{5}{2}}^2x_1 + 5x_{\frac{5}{2}}x_1^2 - 3x_1^3 + 4x_{\frac{5}{2}}^2x_{\frac{3}{2}} - 8x_{\frac{5}{2}}x_1x_{\frac{3}{2}} + 4x_1^2x_{\frac{3}{2}}}{4\left(x_{\frac{3}{2}}^2 - 2x_1x_{\frac{3}{2}} + x_1^2\right)\left(-x_{\frac{5}{2}} + x_{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$a_{23} = \frac{3\left(x_{\frac{5}{2}} - x_1\right)}{4\left(-x_{\frac{5}{2}} + x_{\frac{3}{2}}\right)}$$

Al igual que en el caso de la Divergencia para hallar la matriz A deseada, debemos encontrar las entradas de la matriz de peso Λ , para hallar así la matriz de peso P para el Gradiente, de esta manera formamos el subsistema $\mathbf{M}_w \hat{\mathbf{a}}$, \mathbf{M}_w es como siempre la matriz que tiene por filas, las eliminadas de \mathbf{M} , $\hat{\mathbf{a}}$ es el vector que tiene por componentes las soluciones dadas para los elementos de \hat{A} , las filas eliminadas a \mathbf{r} tienen sólo unos. A continuación presentamos a \hat{P} matriz de peso.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-x_{\frac{5}{2}}^2 + 4x_{\frac{5}{2}}x_{\frac{3}{2}} - 2x_{\frac{5}{2}}x_1 - 4x_1x_{\frac{3}{2}} + 3x_1^2}{4(x_{\frac{3}{2}} - x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{x_{\frac{5}{2}}^2 - 2x_{\frac{5}{2}}x_1 + x_1^2}{4(x_{\frac{3}{2}} - x_1)} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz A es como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\frac{x_3+x_5}{2}-2x_1}{\left(\frac{x_3}{2}-x_1\right)\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_1\right)} & \frac{-x_{\frac{5}{2}}+x_1}{\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x_3}{2}-x_1\right)} & -\frac{\frac{x_3}{2}-x_1}{\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_{\frac{3}{2}}\right)\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_1\right)} \\ -\frac{-2x_1+3x_{\frac{3}{2}}-x_{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{x_3}{2}-x_1\right)\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_1\right)} & \frac{-x_{\frac{5}{2}}+4x_{\frac{3}{2}}-3x_1}{\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x_3}{2}-x_1\right)} & \frac{3\left(\frac{x_3}{2}-x_1\right)}{\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_{\frac{3}{2}}\right)\left(-x_{\frac{5}{2}}+x_1\right)} \end{pmatrix}$$

Si se sustituye este resultado en (2.36), tenemos que las entradas no nulas del operador discreto Gradiente de orden dos no-uniforme \mathcal{G} están dadas por:

$$a_{11} = \frac{2x_1 - x_{5/2} - x_{3/2}}{\left(x_{3/2} - x_1\right)\left(x_{5/2} - x_1\right)},$$

$$a_{12} = \frac{x_{5/2} - x_1}{\left(x_{5/2} - x_{3/2}\right)\left(x_{3/2} - x_1\right)},$$

$$a_{13} = \frac{-x_{3/2} + x_1}{\left(x_{5/2} - x_{3/2}\right)\left(x_{5/2} - x_1\right)},$$

$$a_{21} = \frac{-2x_1 + 3x_{3/2} - x_{5/2}}{\left(x_{3/2} - x_1\right)\left(x_{5/2} - x_1\right)},$$

$$a_{22} = \frac{x_{5/2} - 4x_{3/2} + 3x_1}{\left(x_{5/2} - x_{3/2}\right)\left(x_{3/2} - x_1\right)},$$

$$a_{23} = \frac{3x_{3/2} - 3x_1}{\left(x_{5/2} - x_{3/2}\right)\left(x_{5/2} - x_1\right)}$$

$$a_{33} = \frac{-1}{x_{7/2} - x_{5/2}},$$

$$a_{34} = \frac{1}{x_{7/2} - x_{5/2}},$$

$$a_{44} = \frac{-1}{x_{9/2} - x_{7/2}},$$

$$a_{45} = \frac{1}{x_{9/2} - x_{7/2}},$$

$$a_{55} = \frac{3(x_{9/2} - x_5)}{(x_{7/2} - x_{9/2})(x_{7/2} - x_5)},$$

$$a_{56} = \frac{x_{7/2} - 4x_{9/2} + 3x_5}{(x_{7/2} - x_{9/2})(x_{9/2} - x_5)},$$

$$a_{57} = \frac{-2x_5 + 3x_{9/2} - x_{7/2}}{(x_{9/2} - x_5)(x_{7/2} - x_5)},$$

$$a_{65} = \frac{-x_{9/2} + x_5}{(x_{7/2} - x_{9/2})(x_{7/2} - x_5)},$$

$$a_{66} = \frac{x_{7/2} - x_5}{(x_{7/2} - x_{9/2})(x_{9/2} - x_5)},$$

$$a_{67} = \frac{2x_5 - x_{9/2} - x_{7/2}}{(x_{9/2} - x_5)(x_{7/2} - x_5)}$$

Para el caso de $N = 9$ el Gradiente No-Uniforme tendrá la siguiente estructura:

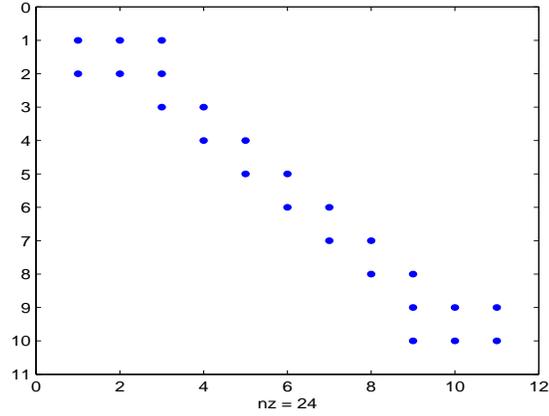


Figura 2.9: Gradiente No-Uniforme $N = 9$

2.7. Teorema de la Divergencia Generalizada

La ley de conservación discreta, puede ser expresada en términos del producto interno usual, mediante la ecuación (2.27), el miembro derecho de esta ecuación contiene una matriz \mathbf{B} de orden $(N+2) \times (N+1)$ cuya forma es bastante elemental (2.28), puesto que el primer elemento es -1 y el último 1 , los demás son nulos. Esta forma de \mathbf{B} es natural a efectos de la discretización mimética, puesto que, garantiza la verificación del teorema de la Divergencia Discreto. Es decir, \mathbf{B} recoge los requerimientos de conservación global.

Sin embargo, para operadores discretos de orden mayor o igual a dos, no es posible construir operadores miméticos, si el producto interno es el usual. Así que, se introdujo el producto interno generalizado (o pesado si la matriz de pesos es diagonal). De esta forma usando las definiciones del producto interno generalizado y usando la definición dada en (2.27) dada en el apartados (2.4.1), tenemos la siguiente versión discreta del Teorema de la Divergencia Generalizado:

$$\left(\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}}\right)_Q + \left(\mathcal{G}^t(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}}\right)_P = \left(\mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}}\right) \quad (2.37)$$

Los elementos que aparecen en (2.37) ya nos son conocidos. No obstante, \mathbf{B} para el producto interno pesado, lamentablemente no toma la forma elemental que para el producto interno usual. En lo que sigue se usará (2.37) para calcular la matriz \mathbf{B} . Se observará en cada uno de los resultados que esta matriz es simétrica centro inclinada.

De la ecuación previa se desprende que \mathbf{B} se puede calcular directamente usando la expresión:

$$\mathbf{B} = \widehat{Q}\widehat{\mathcal{D}} + \mathcal{G}^t x P \quad (2.38)$$

La Divergencia se ha aumentado en dos filas de ceros (primera y última) para hacer la suma consistente, de igual forma se hace con la matriz Q , para la misma, la entrada en la diagonal es un uno (puesto que es positiva definida). Recordemos que el Gradiente es de dimensión $(N+1) \times (N+2)$, mientras que la Divergencia aumentada $\widehat{\mathcal{D}}$ es de dimensión $(N+2) \times (N+1)$, al trasponer a \mathcal{G} , obtendremos las dimensiones deseadas. Tengamos en cuenta que P y Q son matrices centro simétricas.

Para el caso de los mallados No-Uniformes la matriz B , para $N = 5$ tendrá la estructura presentada a continuación:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} \\ 0 & 0 & 0 & b_{64} & b_{65} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Donde los elementos vienen dados por:

$$b_{11} = \frac{(x_{52} - 4x_{32} + 3x_1)(-2, x_1 + x_{52} + x_{32})}{4(x_{32} - x_1)^2},$$

$$b_{12} = \frac{(-x_{52} + x_1)(2x_1 - 3x_{32} + x_{52})}{4(x_{32} - x_1)^2}$$

$$b_{21} = \frac{4x_{52}x_{32}^2 - x_{52}x_1^2 - 4x_{32}^3 + 8x_1x_{32}^2 - 8x_{32}x_1^2 + x_{52}^3 + x_{52}^2x_1 - 4x_{32}x_{52}^2 + 3x_1^3}{4(-x_{52} + x_{32})(x_{32} - x_1)^2},$$

$$\begin{aligned}
b_{22} &= \frac{4x_{52}x_{32}^2 - x_{52}x_1^2 - 4x_{32}^3 + 8x_1x_{32}^2 - 8x_{32}x_1^2 + x_{52}^3 + x_{52}^2x_1 - 4x_{32}x_{52}^2 + 3x_1^3}{4(x_{52} - x_{32})(x_{32} - x_1)^2}, \\
b_{31} &= \frac{x_{52} - 4x_{32} + 3x_1}{4(x_{52} - x_{32})}, \\
b_{32} &= \frac{x_{52} - 4x_{32} + 3x_1}{4(-x_{52} + x_{32})}, \\
b_{44} &= \frac{-x_{72} + 4x_{92} - 3x_5}{4(-x_{72} + x_{92})}, \\
b_{45} &= \frac{x_{72} - 4x_{92} + 3x_5}{4(-x_{72} + x_{92})}, \\
b_{54} &= \frac{-4x_{72}x_{92}^2 + x_{72}x_5^2 + 4x_{92}^3 - 8x_5x_{92}^2 + 8x_{92}x_5^2 + 4x_{72}^2x_{92} - x_{72}^2x_5 - x_{72}^3 - 3x_5^3}{4(x_{72} - x_{92})(x_{92} - x_5)^2}, \\
b_{55} &= \frac{-4x_{72}x_{92}^2 + x_{72}x_5^2 + 4x_{92}^3 - 8x_5x_{92}^2 + 8x_{92}x_5^2 + 4x_{72}^2x_{92} - x_{72}^2x_5 - x_{72}^3 - 3x_5^3}{4(-x_{72} + x_{92})(x_{92} - x_5)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{64} &= \frac{(-x_{72} + x_5)(-2x_5 + 3x_{92} - x_{72})}{4(x_{92} - x_5)^2}, \\
b_{65} &= \frac{(-x_{72} + 4x_{92} - 3x_5)(-2x_5 + x_{92} + x_{72})}{4(x_{92} - x_5)^2}
\end{aligned}$$

2.8. Orden de Convergencia de los Operadores:

Se dice que una expresión matemática tiene orden de aproximación k (entero no negativos) si ella es exacta para los polinomios $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ con $n \leq k$, pero no es exacta para el polinomio $P_{k+1}(x)$

Usando la definición anterior, para realizar el estudio de la convergencia de los operadores de Divergencia y Gradiente No-Uniforme, usaremos polinomios. Los

cálculos serán realizados en un programa de cálculo simbólico como maple, estas cuentas pueden ser detalladas en el apéndice **F**.

Divergencia:

Sea $F(x) = P'_x(x)e_1$ un campo vectorial en \mathbb{R} .

Sea definida como

$$\nabla \cdot F = P(x). \quad (2.40)$$

Donde ∇ es el operador nabla.

Para el cálculo de la convergencia, consideremos el campo vectorial como $F(x) = x^n$, $n = 0, 1, \dots, k$ donde k es el orden de convergencia deseado. El campo mostrado anteriormente tendrá como Divergencia

$$\nabla \cdot F(x_i) = nx_i^{n-1} \quad (2.41)$$

Para el caso continuo, si $k = 2$ y $n = 2$ la Divergencia viene dada por:

$$\nabla \cdot F(x_i) = 2x_i \quad (2.42)$$

La evaluación de la derivada en la celda $x_{i+1/2}$, así que:

$$\nabla \cdot F(x_{i+1/2}) = 2x_{i+1/2} \quad (2.43)$$

para el caso de mallados No-uniformes, el punto en la celda se considera por $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i = 1, \dots, N$ y la expresión que genera cada $x(i)$ está dada por $x_i = (i - 1)h$ donde $h = x_{i+1} - x_i$, así:

$$\begin{aligned}
x_{i+1/2} &= \frac{(i-1)(x_{i+1} - x_i) + i(x_{i+1} - x_i)}{2} \\
x_{i+1/2} &= \frac{(i-1+i)(x_{i+1} - x_i)}{2} \\
&= \frac{2i-1}{2}(x_{i+1} - x_i)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Por lo tanto para $i = 1$ tendríamos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot F(x_{3/2}) &= 2x_{3/2} \\
&= 2 \left(\frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right) \\
&= x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Ahora el análogo discreto del campo vectorial F , se denominará V (campo vectorial discreto nodal)

$$V(x_{i+1/2}) = V_1(x_i)e_1 = x_i^n e_1 \text{ con } n = 0, 1, 2 \text{ para } k = 2 \tag{2.46}$$

De esta forma una aproximación de la Divergencia viene dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}V(x_{i+1/2}) &= \mathcal{D}V_1(x_{i+1/2}) \\
&= \frac{V(x_{i+1}) - V(x_i)}{h}; \quad h = (x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{h}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Realizando el desarrollo para $k = 2$ con $n = 2$, en algunas celdas del mallado tenemos:

$$\mathcal{D}V(x_{i+1/2}) = \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{h} h = (x_{i+1} - x_i) \quad (2.48)$$

Luego tomando $i = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V(x_{3/2}) &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{h} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{(x_2 - x_1)} \\ &= x_2 + x_1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

$i = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V(x_{5/2}) &= \frac{x_3^2 - x_2^2}{h} \\ &= \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_3 - x_2} \\ &= \frac{(x_3 - x_2)(x_3 + x_2)}{(x_3 - x_2)} \\ &= x_3 + x_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Naturalmente que en el caso uniforme da la derivada exacta $\mathcal{D} = 2h$.

De esta manera se calcula la Divergencia para el resto de las celdas del mallado No-Uniforme. En el Apéndice F se mostrarán los cálculos descritos anteriormente, realizados en un programa de cálculo simbólico.

Gradiente

Sea $f(x) = P(x)$ un campo escalar. En general, el Gradiente de $f(x)$ para el caso continuo viene dado por:

$$\nabla f(x) = P'(x)e_1 \quad (2.51)$$

donde P es la derivada parcial de la componente del campo f y e_1 es el vector canónico. Para realizar el estudio de convergencia, se considera un campo polinomial, $f(x) = x^n$ con $n = 0, 1, \dots, k$, donde k representa el orden de convergencia. Este campo tiene como Gradiente en el punto x_i :

$$\nabla f(x_i) = nx_i^{n-1}e_1 \quad (2.52)$$

Nuevamente para el caso continuo en $k = 2$ y $n = 2$, el Gradiente es:

$$\nabla f(x_i) = 2x_i e_1 \quad (2.53)$$

La evaluación del Gradiente se realiza sobre los nodos, por ejemplo en el nodo x_1, x_2 el Gradiente queda como:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1) &= 2x_1 e_1 = 0 \\ \nabla f(x_2) &= 2x_2 e_1 = 2h \end{aligned} \quad (2.54)$$

El análogo discreto del campo escalar f , se denominará \mathbf{f} . Dado el nodo x_i \mathbf{f} es:

$$f(x_i) = \mathbf{f}_1(x_i) = x_i^n \quad (2.55)$$

Para $n = 0, 1, 2$ y $k = 2$, una aproximación para el Gradiente viene dada por:

$$\mathcal{G}f(x_i) = \mathcal{G}f_1(x_1) \quad (2.56)$$

En el caso de $k = 2$ y $n = 2$, tomemos en cuenta un mallado de 9×9 y el Gradiente queda expresado como:

***)Primera fila del operador Gradiente**

$$\mathcal{G}f(x_1) = \mathcal{G}f_1(x_1)e_1 \quad (2.57)$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2x_1 - x_{5/2} - x_{3/2}}{(x_{3/2} - x_1)(x_{5/2} - x_1)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2x_1 - \frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2}}{\left(\frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_3+x_2}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{4(-2x_2 - x_3)}{2(x_2x_3 + x_2^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2(-4h)}{3(3h^2)} = -\frac{8}{3h}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{x_{5/2} - x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{3/2} - x_1)} \quad (2.58)$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{\frac{x_3+x_2}{2} - x_1}{\left(\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{4(x_3 + x_2)}{2 \cdot 2(x_3x_2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{4(3h)}{2(2h^2)} = \frac{3}{h}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{x_1 - x_{3/2}}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.59)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{x_1 - \frac{x_2+x_1}{2}}{\left(\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_3+x_2}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{4(-x_2)}{2(x_3^2 + x_2x_3)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{2h}{6h^2} = -\frac{1}{3h}$$

*)Segunda fila del operador Gradiente

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{-2x_1 + 3x_{3/2} - x_{5/2}}{(x_{3/2} - x_1)(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.60)$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{-2x_1 + \frac{3(x_2+x_1)}{2} - \frac{x_3+x_2}{2}}{\left(\frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_3+x_2}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{4(2x_2 - x_3)}{2(x_2x_3 + x_2^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = 2\frac{(2h - 2h)}{(2h^2 + h^2)} = 0$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{x_{5/2} - 4x_{3/2} + 3x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{3/2} - x_1)} \quad (2.61)$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{4(x_2+x_1)}{2} + 3x_1}{\left(\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{4(-3x_2 + x_3)}{2 \cdot 2(x_3x_2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{2(-3h + 2h)}{2(h^2)} = -\frac{1}{h}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{3x_{3/2} - 3x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.62)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = 3 \frac{\frac{x_2+x_1}{2}x_1}{\left(\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_3+x_2}{2} - x_1\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{4}{2} \frac{(3x_2)}{(x_3^2 + x_2x_3)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{6}{2} \frac{h}{3h} = -\frac{1}{h}$$

*)Tercera fila del operador Gradiente

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{1}{(x_{7/2} - x_{5/2})} \quad (2.63)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{1}{\left(\frac{x_4+x_3}{2} - \frac{x_3+x_2}{2}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{1}{\frac{x_4-x_2}{2}}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{2}{3h - h} = -\frac{1}{h}$$

El segundo elemento de esta fila, es idéntico al obtenido anteriormente, pero con signo contrario con el fin de mantener las propiedad de anticentrosimetría del operador.

Las filas que restan en el interior tendrán un comportamiento análogo al descrito en la tercera fila, salvo en las dos últimas filas que serán analogas a las presentadas en la primera y segunda fila, pero con signo diferente para mantener igualmente la propiedad de anticentrosimetría. Podemos notar como los resultados obtenidos anteriormente son similares a los que obtendríamos en el caso del mallado

uniforme, con lo que podemos decir que este operador mantiene una convergencia de orden 2.

Ahora, estudiemos la convergencia de este operador para el mallaado No-uniforme utilizado para la resolución de la *Ecuación de Helmholtz* :

***)Primera fila del operador Gradiente**

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2x_1 - x_{5/2} - x_{3/2}}{(x_{3/2} - x_1)(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.64)$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2x_1 - \frac{x_3+x_2}{2} - \frac{x_2+x_1}{2}}{\left(\frac{h}{4}\right)\left(\frac{3h}{2}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{16(3x_1 - 2x_2 - x_3)}{6(h^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{8(3x_1 - 2x_2 - x_3)}{3(h^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{x_{5/2} - x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{3/2} - x_1)} \quad (2.65)$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{\frac{3h}{4}}{\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = -\frac{6}{h}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{x_1 - x_{3/2}}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.66)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{-\frac{h}{4}}{\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{3h}{4}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{2}{3h}$$

*)Segunda fila del operador Gradiente

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{-2x_1 + 3x_{3/2} - x_{5/2}}{(x_{3/2} - x_1)(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.67)$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{-2x_1 + \frac{3(x_2+x_1)}{2} - \frac{x_3+x_2}{2}}{\left(\frac{h}{4}\right)\left(\frac{3h}{4}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_1) = \frac{2(2x_2 - x_1 - x_3)}{3(h^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{x_{5/2} - 4x_{3/2} + 3x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{3/2} - x_1)} \quad (2.68)$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{\frac{x_3+x_2}{2} - \frac{4(x_2+x_1)}{2} + 3x_1}{\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{3/2}) = \frac{8(2x_1 - 3x_2 + x_3)}{2(h^2)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{3x_{3/2} - 3x_1}{(x_{5/2} - x_{3/2})(x_{5/2} - x_1)} \quad (2.69)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{\frac{3h}{4}}{\left(\frac{3h^2}{8}\right)}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = \frac{2}{h}$$

*)Tercera fila del operador Gradiente

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{1}{(x_{7/2} - x_{5/2})} \quad (2.70)$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{1}{(\frac{h}{2})}$$

$$\mathcal{G}f(x_{5/2}) = -\frac{2}{h}$$

El comportamiento de las filas interiores es similar al obtenido anteriormente, salvo en la celda donde tengamos paso h ya que esta tendrá la siguiente estructura:

$$\mathcal{G}f(x_{9/2}) = -\frac{1}{(x_{11/2} - x_{9/2})} \quad (2.71)$$

$$\mathcal{G}f(x_{9/2}) = -\frac{1}{(\frac{3h}{4})}$$

$$\mathcal{G}f(x_{9/2}) = -\frac{4}{3h}$$

De esta forma podemos notar que el comportamiento del operador para este mallado es análogo al de paso uniforme, y además los coeficientes se ven afectados por los pasos del mallado, sin embargo al momento de manipularlos con paso uniforme podremos hallar los coeficientes del operador uniforme. Las cuentas antes realizadas pueden ser vistas en el Apéndice (F).

Capítulo 3

Resolución de la *Ecuación de Helmholtz* sobre mallados No-Uniformes

En el siguiente capítulo se aplicarán los operadores miméticos obtenidos mediante la metodología de *Montilla, Cadenas y Castillo* [1] para resolver la *Ecuación de Helmholtz* sobre mallados No-Uniformes en 1D. Se estudiará el orden de convergencia de la solución arrojada por este método y se comparará con los resultados obtenidos por un método de *Diferencias Finitas Clásica* sobre un dominio No-Uniforme.

3.1. Generación del Mallado No-Uniforme

Se requiere de un mallado No-Uniforme para el desarrollo de este trabajo, el mismo será construido a través de los siguientes pasos:

- Sea N el número de celdas que deseamos obtener para el mallado.
- Construyamos un partición del intervalo $[a, b]$, que contenga $N - 4$ subintervalos igualmente espaciados, siendo la distancia entre cada intervalo h .
- Los dos sub-intervalos que están situados junto a las fronteras del intervalo, dividámoslos a la mitad, de modo que cada nuevo subintervalo tenga longitud $h/2$.

Para visualizar lo anteriormente descrito ver la figura (3.1).

De esta manera el mallado No-Uniforme generado mediante estos pasos, tendrá la presente estructura:

$$\frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} h \dots h \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2}$$

Por ejemplo, si $N = 9$ el número de celdas que se desea obtener, el mallado presentará la siguiente estructura:

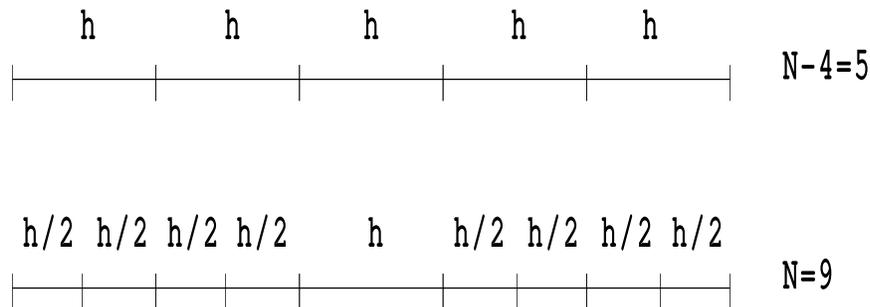


Figura 3.1: Mallado No-Uniforme para $N = 9$

3.2. Discretización de la *Ecuación de Helmholtz*

Con el fin de resolver la *Ecuación de Helmholtz* haciendo uso del método obtenido por *Montilla, Cadenas y Castillo* [1] es necesario escribir el sistema presentado a continuación de forma discreta:

$$\begin{aligned} p'' + k^2 p &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ p'(0) &= ik \\ p'(1) - ikp(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde p representa la presión y k es una constante conocida como el número de onda.

Para una mejor visualización del desarrollo de la discretización se escribe el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dx^2} p + k^2 p = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{3.2}$$

Con condiciones de frontera tipo Robin:

$$\alpha p(0) - \beta \frac{dp}{dx}(0) = \gamma_1, \quad x = 0 \tag{3.3}$$

$$\alpha p(1) + \beta \frac{dp}{dx}(1) = \gamma_2, \quad x = 1 \tag{3.4}$$

donde $p = p(x)$ es una función escalar desconocida cuyo dominio es $[0, 1]$, esta función p va a ser calculada sobre las celdas más las fronteras del mallado, de tal forma que p tendrá $N + 2$ elementos. El conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma_i \quad i = 1, 2\}$ son

parámetros reales conocidos y $w = k^1$ es conocido como el número de onda de la ecuación. Dado la estructura del sistema (3.1) tendremos los siguientes valores para la discretización:

- Los valores de los parámetros α, β y γ_1 , para la condición de frontera (3.3) están dados por:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1 \quad y \quad \gamma_1 = iw$$

- Los valores de los parámetros α, β y γ_2 , para la condición de frontera (3.4) están dados por:

$$\alpha = -iw, \quad \beta = 1 \quad y \quad \gamma_1 = 0$$

Para realizar la discretización del sistema (3.1) haremos uso de las aproximaciones para la *Divergencia* y el *Gradiente* continuo, usando así la Divergencia mimética extendida y el Gradiente mimético. De esta forma tendremos que la ecuación (3.2) quedará descrita en función del operador Laplaciano:

$$\frac{d^2}{dx^2}p + w^2p = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla_p) + w^2p = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow (\hat{\mathcal{D}} \cdot \mathcal{G} + w^2)p = 0 \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow (LapM + w^2\hat{I})p = 0 \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{cases} LapM (\hat{\mathcal{D}}\mathcal{G}) & : \text{Laplaciano Mimético} \\ \hat{I} & : \text{Identidad extendida 2 filas y 2 columnas} \end{cases} \quad (3.8)$$

¹A partir de este momento llamaremos w al número de onda, que en otros contextos se simboliza por k y así no existirá confusión con el orden del operador.

La identidad extendida a la que se hizo mención anteriormente, es una matriz de $(N + 2) \times (N + 2)$, nos ayudará a aportar la información referente al segundo miembro del lado izquierdo de la ecuación, que para este caso son los elementos usados para la discretización multiplicados por la constante w^2 ; dicha matriz tendrá una estructura como la que se presenta a continuación:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Para llevar acabo la discretización de las condiciones de frontera involucraremos un conjunto de operadores matriciales que contendrán a los coeficientes de las condiciones de frontera tipo Dirichlet y tipo Neumann.

En las condiciones de frontera tipo Dirichlet involucrados en (3.3) y (3.4), el operador de frontera que involucra al parámetro α tiene la siguiente estructura:

$$B_d = \begin{pmatrix} \alpha I_{1 \times 1} & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \alpha I_{1 \times 1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

En el caso de las condiciones tipo Neumann (3.3) y (3.4) se involucra al parámetro β , localizándose en los extremos de la diagonal principal y el propósito de esta matriz es mantener intacto al operador de frontera B , para el caso de una aproximación de orden 2 la matriz de coeficientes tipo Neumann tendrá la

estructura que se presenta a continuación, en otro caso se puede considerar las entradas de la diagonal principal como unos.

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Matriz de la Derivada Direccional en la Frontera B

Esta matriz se encuentra relacionada con las condiciones de frontera dadas en (3.3) y (3.4) y las entradas para esta matriz están definidas por la siguiente expresión:

$$B = Q\hat{\mathcal{D}} + \mathcal{G}'P \quad (3.12)$$

donde Q es una matriz conocida como matriz de peso para la Divergencia, cuyas dimensiones son $(N + 2) \times (N + 2)$, para el caso uniforme esta matriz presenta la estructura de la identidad de orden $(N + 2)$. $\hat{\mathcal{D}}$ es el operador de Divergencia extendida dos filas, cuyas dimensiones son $(N + 2) \times (N + 1)$, \mathcal{G}' es el operador Gradiente transpuesto de dimensión $(N + 2) \times (N + 1)$ y P es la matriz de peso del operador Gradiente de orden $(N + 1) \times (N + 1)$.

Este operador B es conocido del *Teorema de la Divergencia Discreta Generalizada* (2.7) y el mismo recoge los requerimientos de conservación global. Q y P son matrices simétricas y definidas positivas que permiten obtener un producto interno generalizado. Para un mayor estudio se puede ver [13].

Vector Columna de la función desconocida p

Este vector está formado por las componentes de la función desconocida p , las cuales están ubicadas en un mallado extendido. Donde p es una $(N + 2)$ -upla y tiene la forma $(p_1, p_{3/2}, p_{5/2}, \dots, p_{N+1/2}, p_{N+1})$, donde los valores con puntos medios representan los valores de las celdas en el mallado y los puntos enteros las fronteras.

Vector Columna b

Este vector es obtenido por el lado derecho del sistema (3.1), es decir vector de términos independientes, los valores conocidos para la función y los parámetros γ_i , $i = 1, 2$, para el caso del estudio el vector b tendrá la siguiente forma:

$$b = (iw, 0, \dots, 0) \quad (3.13)$$

Para un mayor estudio de la discretización de ecuaciones diferenciales parciales para métodos matriciales se puede ver [17]. Conocida ya la estructura de las matrices de coeficientes de frontera, el vector de incógnitas p y el vector columna b , procedamos a estudiar como quedarían las condiciones de frontera en función de los operadores continuos Divergencia y Gradiente, para luego introducir los operadores miméticos.

$$\frac{dp}{dx}(0) = iw \Rightarrow \nabla_p(0) = iw \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{G} \cdot p(0)) \vec{n} = iw \quad (3.15)$$

$$\frac{dp}{dx}(1) - iwp(1) = 0 \Rightarrow \nabla_p(1) - iwp(1) = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow (\mathcal{G} \cdot p(1)) \vec{n} - iwp(1) = 0 \quad (3.17)$$

De esta forma la ecuación discretizada del sistema dado por (3.1) y un mallado No-Uniforme es la siguiente:

$$\left(B_d + \frac{1}{h} B_n B_1 \mathcal{G} + \frac{1}{h^2} \hat{\mathcal{D}} \mathcal{G} + k^2 \hat{I} \right) p_{sc} = b \quad (3.18)$$

La ecuación anterior es la que se utilizará para la resolución sobre mallados No-Uniformes, los términos $1/h$ y $1/h^2$ están incluidos dentro de los operadores No-Uniformes, ya que al momento de calcularlos se incluye el paso del mallado entre cada punto. Sin embargo, para el caso uniforme deseamos que esta ecuación sea lineal y para comodidad de los cálculos evitaremos los cocientes $1/h$ y $1/h^2$, recordemos que por comodidad de la construcción de los operadores uniformes, este término no era necesario tomarlo en cuenta, para lograr lo antes mencionado multiplicaremos a ambos lados de la igualdad por h^2 para no afectar la ecuación, quedando así

$$\left(h^2 B_d + h B_n B_1 \mathcal{G} + \hat{\mathcal{D}} \mathcal{G} + h^2 k^2 \hat{I} \right) p_{sc} = h^2 b \quad (3.19)$$

donde:

- $\hat{\mathcal{D}}$: Operador Divergencia extendida, se le han agregado 2 filas de cero para que se cumpla el teorema de la Divergencia generalizado.
- \mathcal{G} : Operador Gradiente 222 para mallados uniformes.
- \hat{I} : Matrix identidad extendida.
- B_n : Matriz asociada a las condiciones de frontera tipo Neumann.
- B_d : Matriz asociada a las condiciones de frontera tipo Dirichlet.
- B_1 : Operador de frontera.
- h : Paso del mallado.

- p : Vector de incógnitas.
- b : Vector de términos independientes.

En el apéndice (B) se muestra un algoritmo desarrollado en Matlab, para la generación de los operadores usados en la discretización anterior y además se resuelve la *Ecuación de Helmholtz* haciendo uso de los operadores allí mismos calculados.

3.3. Análisis de Orden de Convergencia

En esta sección se realizará el análisis de la convergencia, es decir, se estudiará el comportamiento del método cuando éste se utilice para aproximar la solución de una ecuación diferencial, sujeta a ciertas condiciones de frontera.

El error de convergencia es medido mediante la siguiente expresión

$$\| Error \| \leq Ch^r \quad (3.20)$$

donde $Error$ no es más que la diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial y la aproximada, C es una constante arbitraria, h es el espaciamiento entre dos nodos consecutivos del mallado y r es el orden de convergencia del método.

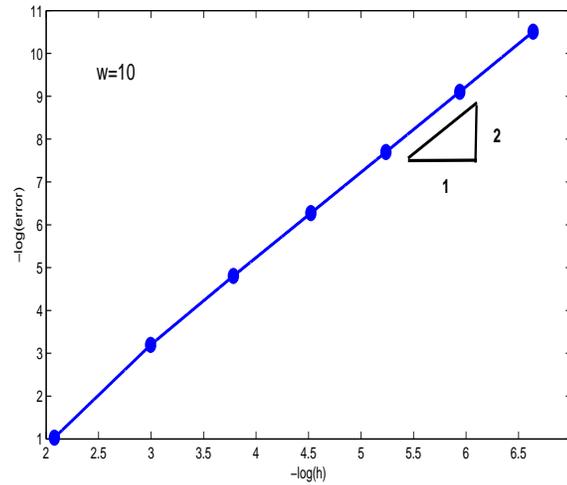
Es necesario destacar que el espaciamiento entre nodos (h), se define como:

$$h = \max_j \{h_j\} \quad (3.21)$$

donde $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 1, \dots, N$ y N es el número de celdas del mallado. La norma a utilizar para el error es la norma-2, la cual es conocida como una norma de energía.

Para realizar el análisis de convergencia del método desarrollado, realizaremos una discretización No-Uniforme del intervalo $[0, 1]$ e iremos incrementando la cantidad de subintervalos de manera sucesiva. Se calcularán los errores en cada aproximación para cada valor de N , de esta forma tendremos dos listas de valores; una con los valores del error y otra con el máximo valor de h , en ambos casos para cada valor de N . Seguidamente tomaremos los logaritmos naturales negativos de cada una de las listas mencionadas anteriormente, luego realizaremos una gráfica de estos datos. Con el fin de asegurarnos que estamos estudiando la parte del error excluyendo aquella donde existe mayor dispersión numérica, escogeremos el nodo a partir del cual haremos el cálculo de la convergencia, finalmente llevaremos a cabo una regresión lineal, mediante la que obtendremos la pendiente de la recta que representará el orden de convergencia.

Para realizar este cálculo usamos valores de $w = 10, 100$ y 200 (w es el número de onda), los valores para N serán acorde con el número de onda y determinado por la expresión $N \geq \max\{9, 7w/2\pi\}$, se pide el máximo entre 9 y $7w/2\pi$, porque 9 es el mínimo mallado que podemos formar con los pasos descritos en (3.1) y $7w/2\pi$ ya que es el mínimo número de puntos que se requiere dependiendo de w , luego este valor se irá duplicando. En las líneas siguientes mostraremos las gráficas correspondientes a los valores de w anteriormente mencionados, así como, una tabla donde se mostrará el orden de convergencia obtenido para cada valor de w y el valor del tiempo en segundos empleado para realizar los cálculos.

Figura 3.2: Convergencia para $w=10$

w	Orden	Tiempo (s)
10	2,003	1.009
100	1.997	149.64
200	1.979	1148.33

Cuadro 3.1: Orden de Convergencia

En las figuras (3.2), (3.3) y (3.4) se muestra la gráfica del $-\log(\text{error})$ en función del $-\log(h)$. Y en la tabla (3.1) podemos ver que el orden de convergencia para estos valores de w es muy cercano a 2, por lo que podemos decir que el orden de convergencia para el error es cuadrático. A continuación mostraremos el cuadro 3.1, donde se puede ver lo antes descrito.

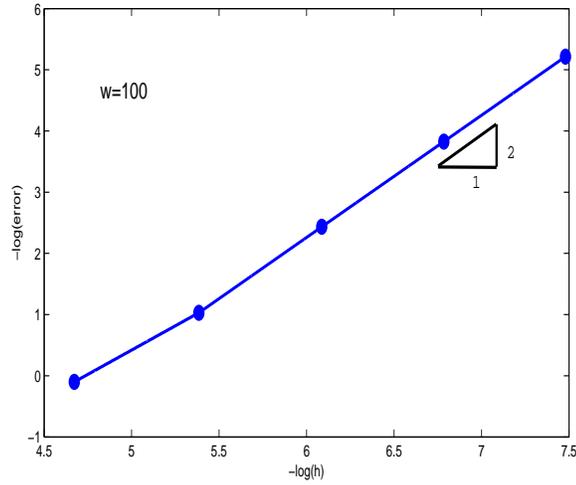


Figura 3.3: Convergencia para $w=100$

3.4. Diferencias Finitas No-Uniforme para resolver la Ecuación de Helmholtz

Con el fin de comparar los resultados obtenidos por el método de *Montilla, Cadenas y Castillo* sobre mallas No-Uniformes para resolver la Ecuación de Helmholtz, se usará un esquema en *Diferencias Finitas Clásica* sobre un dominio No-Uniforme para resolver el sistema:

$$\begin{aligned}
 p'' + k^2 p_{sc} &= 0, & 0 < x < 1 & \quad (3.22) \\
 p'(0) &= ik \\
 p'(1) - ikp(1) &= 0.
 \end{aligned}$$

La discretización de este sistema para *Diferencias Finitas Clásica* se escribe como:

$$(A + L\hat{a}p + w^2\hat{I})p = b \quad (3.23)$$

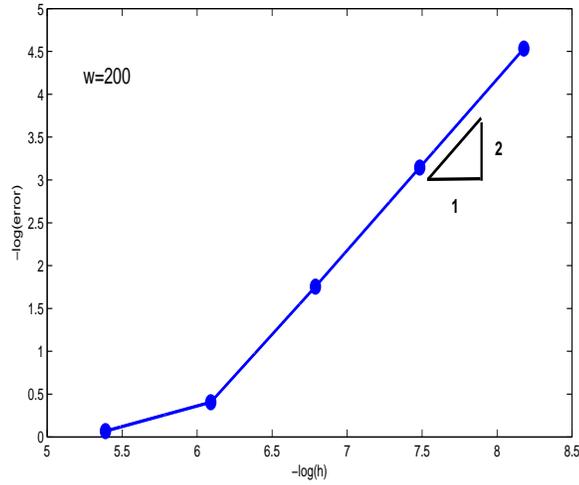


Figura 3.4: Convergencia para $w=200$

donde

- A es un operador matricial que involucra las condiciones de frontera dadas en (3.22).
- $\hat{L}ap$ ($\hat{\mathcal{D}}\mathcal{G}$) es el operador discreto de la segunda derivada, extendido en dos filas de ceros, para adecuar la dimensión en las operaciones.
- \hat{I} matriz identidad extendida en dos columnas de ceros y dos filas de ceros.
- b es el vector de términos independientes del sistema.
- p es el vector de incógnitas.

La distribución de los puntos para dicha discretización se realizó acorde con la construcción del mallado No-Uniforme generado para el método MCC, es necesario recordar que el vector solución está calculado en los puntos medios (celdas) y las fronteras del mallado, por lo tanto deseamos distribuir estos puntos de igual manera para el esquema de *Diferencias Finitas* que para el método mimético

usado, esto con el fin de poder realizar las comparaciones necesarias en cuanto a los resultados obtenidos . De esta forma la discretización del intervalo $[a, b]$ tendrá la siguiente estructura, donde los puntos en rojo son los puntos donde se producirá la solución:

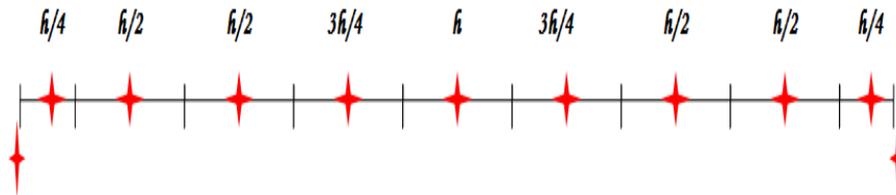


Figura 3.5: Mallado para Diferencias Finitas

Dada la cantidad de puntos con los que se quiera trabajar vamos a tener pequeños cambios en el centro del mallado anterior. Para $N \geq 9$ tendremos tres tipos de situación, estudiaremos estos casos ya que la construcción del mallado para el caso mimético bajo los pasos descritos a principio del capítulo, funciona para los casos en que $N \geq 9$.

- Para $N = 9$, tendremos $N + 2 = 11$ puntos sobre los cuales realizaremos los cálculos por el método de Diferencias Finitas y $N + 1 = 10$ pasos, de esta forma nuestro mallado tendrá la siguiente estructura en función de los h y la distancia entre las celdas tiene la forma a continuación descrita:

$$\frac{h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{3h}{4} \frac{3h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{4} \tag{3.24}$$

- Para $N = 10$ vamos a tener la presencia de un paso h y el centro del mallado cambiará su estructura:

$$\frac{h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{3h}{4} h \frac{3h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{4} \tag{3.25}$$

- Para $N \geq 11$ los pasos h se van incrementando en el centro del mallado y su estructura se verá como:

$$\frac{h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{3h}{4} h \cdots h \frac{3h}{4} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{h}{4} \quad (3.26)$$

Debido a este comportamiento en el centro del mallado para distintos valores de N , será necesario realizar la construcción de diferentes fórmulas de Diferencias Finitas, que involucren los distintos pasados del mallado. De esta forma se obtienen tres estructuras diferentes para el Laplaciano, que irá acorde con el N a utilizar. A continuación se muestran las fórmulas utilizadas para el cálculo de las aproximaciones en el centro del mallado en cada uno de estos casos:

Caso $N = 9$

Centrada con paso $h = 3h/4$	$f(x_n) = \frac{f(x_{n-1}) - 2f(x_n) + f(x_{n+1}))}{h^2}$
Uno adelante y dos atrás	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{1}{7}f(x_{n-2}) + \frac{2}{5}f(x_{n-1}) - f(x_n) + \frac{16}{35}f(x_{n+1})]$
Uno detrás y dos adelante	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{16}{35}f(x_{n-1}) - f(x_n) + \frac{2}{5}f(x_{n+1}) + \frac{1}{7}f(x_{n+2})]$

En la figura 3.6, se presenta la estructura del Laplaciano obtenido con las fórmulas antes mencionadas para $N = 9$.

Caso $N = 10$

Uno adelante y dos atrás	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{8}{90}f(x_{n-2}) + \frac{8}{42}f(x_{n-1}) - \frac{8}{15}f(x_n) + \frac{16}{63}f(x_{n+1})]$
Uno detrás y dos adelante	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{16}{63}f(x_{n-1}) - \frac{8}{15}f(x_n) + \frac{8}{42}f(x_{n+1}) + \frac{8}{90}f(x_{n+2})]$

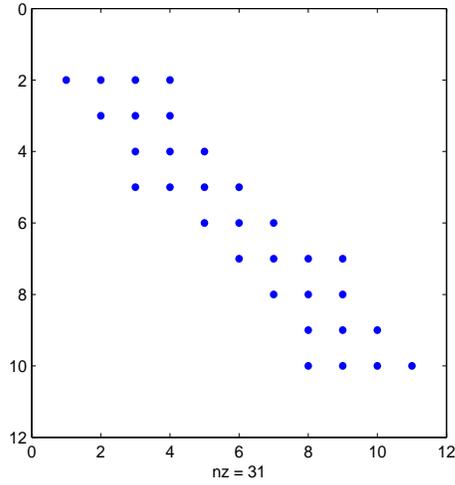


Figura 3.6: Laplaciano $N = 9, w = 2\pi$

En la figura 3.7, se presenta la estructura del Laplaciano obtenido con las fórmulas antes mencionadas para $N = 10$.

Caso $N = 11$

Uno adelante y dos atrás	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{8}{90}f(x_{n-2}) + \frac{8}{42}f(x_{n-1}) - \frac{8}{15}f(x_n) + \frac{16}{63}f(x_{n+1})]$
Uno detrás y dos adelante	$f(x_n) = \frac{4}{h^2} [\frac{16}{63}f(x_{n-1}) - \frac{8}{15}f(x_n) + \frac{8}{42}f(x_{n+1}) + \frac{8}{90}f(x_{n+2})]$
Centrada con paso h	$f(x_n) = \frac{f(x_{n-1}) - 2f(x_n) + f(x_{n+1}))}{h^2}$

En la figura 3.8, se presenta la estructura del Laplaciano obtenido con las fórmulas antes mencionadas para $N = 11$

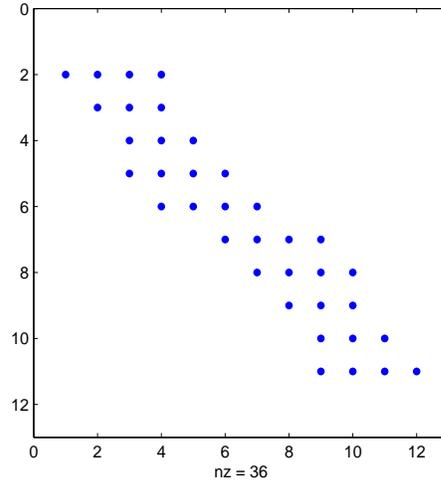


Figura 3.7: **Laplaciano** $N = 10, w = 2\pi i$

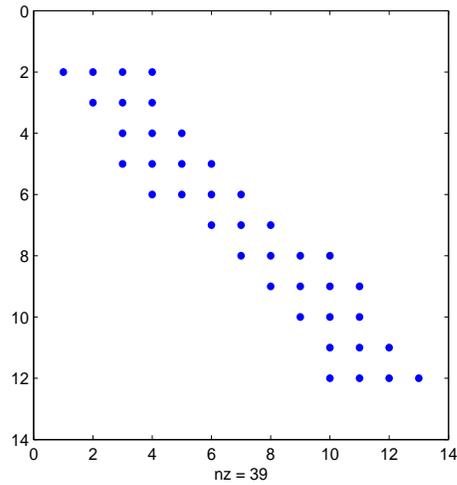


Figura 3.8: **Laplaciano** $N = 11, w = 2\pi i$

Para la discretización de las fronteras del sistema (3.22) usaremos las fórmulas de Diferencias Finitas para la primera derivada de segundo orden No-Uniforme, estas discretizaciones son las que conforman la matriz A del sistema, donde A es una matriz nula de tamaño $N + 2$, cuyas entradas no nulas están ubicadas en la primera fila y en la última fila.

Frontera izquierda $p'(0) = iw$, para este caso usaremos una fórmula hacia adelante.

$$p'(0) = iw \quad (3.27)$$

$$\frac{2(-8f(x) + 9f(x + h/2) - f(x + 3h/2))}{3h} = iw$$

$$2(-8f(x) + 9f(x + h/2)) = 3iwh$$

Frontera derecha $p'(1) - iw p(1) = 0$, para este caso usaremos una fórmula hacia atrás.

$$p'(1) - iw p(1) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{2(8f(x) - 9f(x - h/2))}{3h} + f(x - 3h/2) - iw f(x) = 0$$

$$2(8f(x) - 9f(x - h/2) + f(x - 3h/2)) + (2 * 8f(x) - 3iwhf(x)) = 0$$

En la figura (3.9) se puede observar la estructura que presenta dicha matriz para un $N = 11$.

En el apéndice D se encuentran los códigos en Matlab generados para estos cálculos.

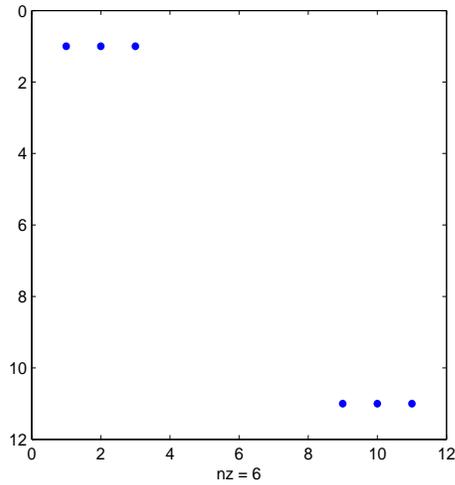
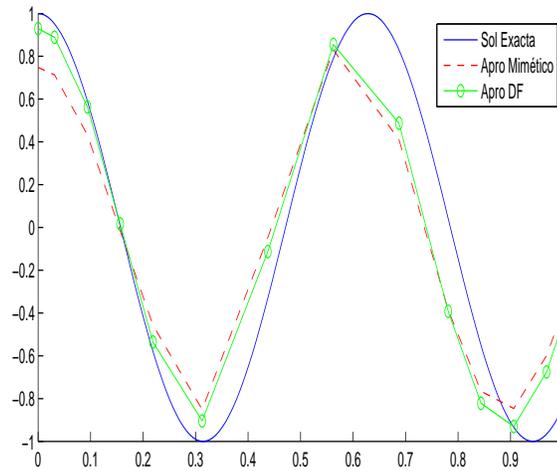


Figura 3.9: Matriz Identidad Extendida $N = 11, w = 2\pi$

3.5. Comparación del Método de MCC No-Uniforme Vs Diferencias Finitas Clásica

En esta sección, mostraremos algunas pruebas realizadas para la resolución de la *Ecuación de Helmholtz* con el método de MCC y el de *Diferencias Finitas Clásica* sobre mallados No-Uniformes. Los resultados de estas pruebas se presentan mediante gráficas y cuadros comparativos referentes al orden de convergencia. Los valores de w seleccionados para la realización de esta prueba son $w = 10$ y $w = 100$. Las gráficas mostradas consisten en las regresiones lineales realizadas sobre puntos definidos como $p_i = (-\log(h_i), -\log(ERROR_i))$ para $i = 1, 2, \dots, N_{iter}$. Adicionalmente, mostraremos el orden de convergencia presentado para cada método mediante cuadros comparativos; que contendrán los datos obtenidos mediante cada regresión.

Adicionalmente, mostraremos el contraste de algunas soluciones obtenidas por ambos métodos contra la solución de la exacta, para los mismos valores de w mencionados anteriormente y N acordes al número de onda.

Figura 3.10: Mimético Vs DF $w = 10$

w	<i>Orden Mimético No-Uniforme</i>	<i>Orden Diferencias Finitas</i>
10	2,003	1.961
100	1.997	1.996

Cuadro 3.2: Orden de Convergencia

En las gráficas mostradas en la figura 3.12 y figura 3.13 podemos notar la convergencia presentada por cada uno de los métodos, pudiéndose apreciar en ellas que el orden de convergencia obtenido es muy similar para ambos casos.

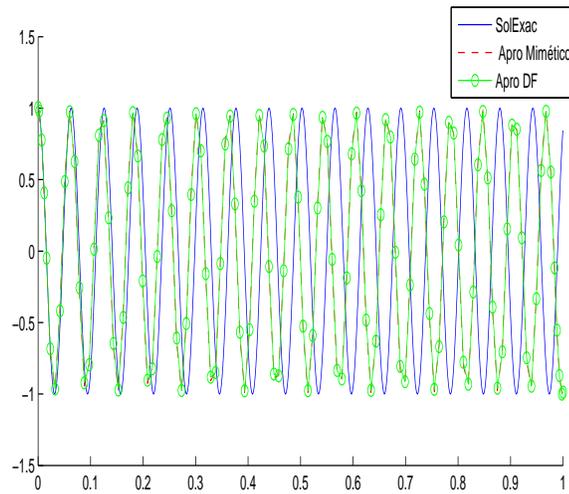


Figura 3.11: **Mimético Vs DF** $w = 100$

Con esto podemos decir que los métodos comparados se comportan de manera similar, notándose fuertemente para valores de w altos y N grandes, en la gráfica 3.10 se nota que para N pequeños el método de *Diferencias Finitas* tiene una mejor aproximación que el método mimético, pero a medida que N crece estos se comportan de igual manera; mediante que en la gráfica 3.11 este comportamiento se puede notar desde un principio. Cabe destacar que una de las ventajas presentadas por los métodos miméticos es que los mismo preservan propiedades importantes del continuo, tales como las leyes de conservación, lo que representa una gran ventaja sobre los algoritmos en *Diferencias Finitas*. Un comportamiento similar a este se puede observar en [11], donde se muestra un estudio numérico de distintos esquemas de discretización en *Diferencias Finitas*, entre los cuales se encuentra el Castillo-Grone-Yasuda. Los algoritmos necesarios realizados para estos cálculos se pueden apreciar en los apéndices D y E

3.5.1. *Dispersión numérica*

La solución de la *Ecuación de Helmholtz* contiene un término de contaminación, el cual depende del número de onda w , este término tiene mayor influencia a medida que w aumenta.

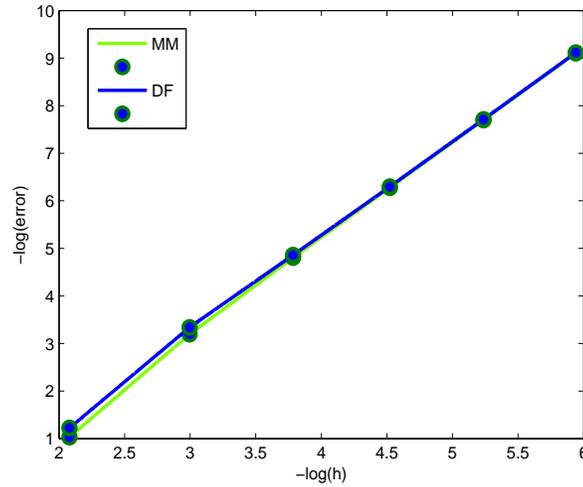


Figura 3.12: Convergencia Mimético Vs DF $w = 10$

Este término es despreciable si $w\Delta h \ll 1$, pero se hace más notable a medida que las longitudes de onda se hacen comparables con el espaciamiento de la malla, lo que causa que la dispersión numérica se concentre en altas frecuencias; esto es lo que comúnmente es conocido como desfase de la solución y no es más que el efecto que se produce en algunos lugares de la gráfica donde la solución aproximada mantiene el comportamiento de la solución exacta, pero a pesar de ello no se acerca a la exacta.

Si realizamos la siguiente suposición $w\Delta h \gg 1$, vamos a tener presente tres tipos de desfase, que van a depender de la diferencia del error de la dispersión, el cual no es más que la diferencia entre el número de onda de la solución analítica y la solución numérica. Estos tres tipos de desfase se les conoce como:

- Fase Oscilatoria.
- Zona de Transición.
- Decaimiento Superexponencial.

Estos tipos están detallados en el artículo [18].

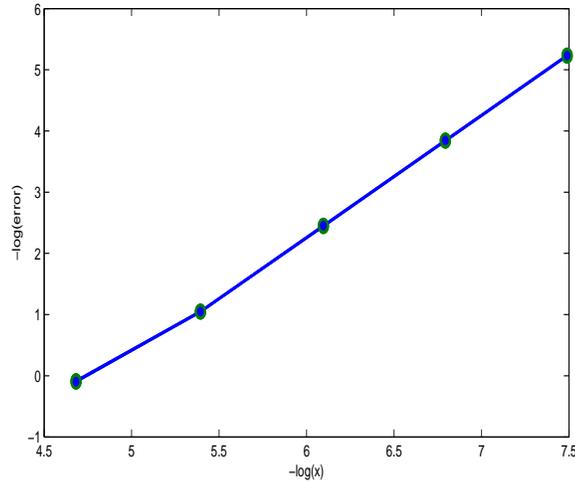


Figura 3.13: Convergencia Mimético Vs DF $w = 100$

3.6. Conclusiones y Comentarios Finales

- Se elaboró un algoritmo computacional en un lenguaje de alto nivel (MatLab) para hallar los operadores unidimensionales No-Uniformes; donde se obtuvo como salida la matriz del operador Divergencia, la matriz del operador Gradiente y el Laplaciano Mimético.
- La expresión que discretiza la *Ecuación de Helmholtz* con las condiciones de frontera impuestas, se incorporó al algoritmo antes señalado para así obtener las soluciones buscadas.
- Se realizó el estudio de convergencia de los operadores Divergencia y Gradiente No-Uniformes, los cuales resultaron ser de orden dos a lo largo de todo el mallado. Estos cálculos se realizaron haciendo uso de funciones polinómicas y apoyándonos en los cálculos computacionales hechos en un lenguaje simbólico (Maple).
- Se realizó el estudio de convergencia de las soluciones obtenidas mediante la aplicación del algoritmo computacional para la resolución de la *Ecuación de Helmholtz*, obteniendo que el orden de las soluciones es de orden cuadrático.

- Se elaboró un algoritmo computacional en un lenguaje de alto nivel (MatLab), donde se realizó la discretización de la *Ecuación de Helmholtz* haciendo uso de un método de Diferencias Finitas, para así dar solución a la ecuación; esto con el fin de realizar comparaciones a nivel de convergencia de los métodos; al realizar este estudio se pudo notar que los resultados obtenidos por el Método Mimético No-Uniforme en 1D mantiene un comportamiento similar a los obtenidos por el esquema encontrado mediante un Método de Diferencias Finitas. Se observó que para números de onda pequeños y N acordes a éste el método mimético tiene mejor convergencia que el método de Diferencias Finitas.
- Una vez que se discretiza la ecuación se pueden hacer pruebas fácilmente con el algoritmo usando diferentes mallados solamente variando el N (Número de Celdas).

Entre algunas recomendaciones tenemos:

- Realizar pruebas para diferentes mallados, con el fin de visualizar si el comportamiento del método mimético no-uniforme obtiene mejores resultados.
- Efectuar el cálculo de los operadores no-uniformes Divergencia y Gradiente miméticos a un orden superior, por ejemplo orden 4.
- Realizar la discretización de otros problemas físicos para ser resueltos mediante los esquemas miméticos, tanto uniforme como no-uniforme. A pesar de que existe una amplia teoría sobre estos métodos, no tienen suficientes pruebas de modelos físicos concretos.
- Realizar un análisis de la dispersión numérica obtenida mediante los esquemas miméticos en esta clase de problemas físicos.

Apéndice A

Ecuación de Onda

En el mundo actual nos encontramos rodeados de cualquier cantidad de fenómenos ondulatorios, estos forman parte de nuestro entorno diario y muchas veces pasan desapercibidos delante de nosotros, así como también muchas veces damos origen a las mismas sin siquiera tener conciencia de ello. Cuando estamos a la orilla de un lago y arrojamos una piedra producimos una onda, cuando tocamos la guitarra, cuando hablamos y hasta cuando caminamos somos causantes de una onda.

Físicamente, una onda no es más que una perturbación de una magnitud física que se propaga en el espacio y en el tiempo[19]. Matemáticamente se expresa como una función de la posición y del tiempo, pudiendo corresponder a magnitudes tan dispares como la altura de una ola de agua o los impulsos eléctricos que rigen los latidos del corazón.

Tipos de Onda:

En la naturaleza nos vamos a encontrar con muchos tipos de onda, las cuales vamos a clasificar de acuerdo a ciertos parámetros:

- Según el medio que se propaga:

- **Ondas Mecánicas:** Necesitan un medio elástico (gaseoso, líquido o sólido)
 - **Ondas Electromagnéticas:** se propagan por el espacio sin necesidad de un medio.
 - **Ondas Gravitacionales:** Son ondas que alteran la geometría misma del espacio.
- Según su frente de onda:
 - **Onda Unidimensionales:** Son aquellas que se propagan a lo largo de una sola dirección del espacio.
 - **Onda Bidimensionales:** También conocidas como superficiales, pueden propagarse en cualquiera de las direcciones de una superficie.
 - **Onda Tridimensionales:** También llamadas esféricas, sus frentes de perturbación son esferas concéntricas que salen de la fuente de perturbación expandiéndolas en todas las direcciones.
 - Según la dirección de perturbación:
 - **Ondas Longitudinales:** El movimiento de las partículas que transporta la onda es paralelo a la dirección de propagación.
 - **Ondas Transversales:** Las partículas se mueven en dirección de la propagación de onda.

El estudio de las ondas acústicas, ondas de agua, electromagnéticas y vibraciones mecánicas están basados en el estudio de una ecuación hiperbólica, definida en derivadas parciales, que surge de describir fenómenos relacionados a la propagación de ondas en medios continuos, conocida como la *Ecuación Unidimensional de Onda* y está dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

donde k es una constante que hace referencia a la velocidad de la propagación de la onda. Esa misma ecuación la podemos ver escrita en función del operador laplaciano como sigue:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \nabla^2 u \quad (\text{A.2})$$

Deducción de la Ecuación de Onda en 1-D

La deducción de la Ecuación de Onda en 1D, puede realizarse sobre cualquier medio físico, gaseoso, líquido o sólido, ya que los resultados obtenidos son análogos y las variaciones van a venir dadas en función de la constante.

La mayor parte de la literatura que hace referencia a la deducción de esta ecuación la introduce a través de una cuerda vibrante, la cual es un sistema físico complicado. Tengamos presente que una cuerda vibra solo si esta tensa, para la deducción de la ecuación es necesario realizar una serie de suposiciones, las cuales presentaremos a continuación:

- Supongamos que se tiene una cuerda tensa perfectamente flexible en posición horizontal y en equilibrio, cuyos extremos están fijos.
- Supongamos se tiene una partícula cuya posición es $x = \alpha$ cuando la cuerda esta en equilibrio, además supongamos que la cuerda se mueve con el tiempo, lo que quiere decir que en un tiempo $t_i \neq t_0$ la cuerda estará en un punto diferente a su posición de equilibrio.

- La pendiente de la curva es pequeña, por lo que en un principio el movimiento es completamente vertical y la posición de la partícula depende solo de x y t , es decir $y = u(x, t)$.
- La densidad de masa en la cuerda es como sigue:
 - Sin perturbación: $\rho_0(x)$.
 - Con perturbación: $\rho_0(x)\Delta x$, donde Δx es el desplazamiento.
- La tensión de la cuerda y su magnitud es igual en todos los puntos.
- Existen fuerzas que actúan en dirección vertical (gravedad), al igual de las que actúan sobre los extremos de la cuerda.

Como el objetivo es deducir una ecuación en derivadas parciales que describa la posición de u con respecto a t , debemos tomar en cuenta la acción de las fuerzas, por lo que nos apoyaremos en la 2^{da} **Ley de Newton**, descrita por:

$$F = ma \tag{A.3}$$

La ecuación de movimiento vertical establece que la masa por la componente vertical de la aceleración es igual a la componente de las sumas de fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Donde las componentes de las fuerzas esta dado por :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = ma_x \\ \sum F_y &= T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = ma_y \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta(x + \Delta x, t) \\ \theta_1 &= \theta(x, t)\end{aligned}$$

Dentro de nuestras suposiciones dijimos que la pendiente de la curva era pequeña, por lo tanto θ es pequeño y podemos decir que $\cos\theta \cong 1$ y el $\sin\theta = \theta$, así el sistema anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= T_2 - T_1 = ma_x \\ \sum F_y &= T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 = ma_y\end{aligned}$$

Además el movimiento es transversal por lo tanto $a_x = 0$ y finalmente el sistema se transforma en:

$$\sum F_x = T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow T_2 = T_1 \quad (\text{A.4})$$

$$\sum F_y = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 = ma_y \quad (\text{A.5})$$

Donde (A.4) confirma nuestra suposición de que la tensión a lo largo de la cuerda es igual en todos los puntos. Realizando las sustituciones correspondientes de la masa y la aceleración en el sistema anterior, se tiene:

$$\rho_0(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \Delta x, t) \sin\theta_2 - T(x, t) \sin\theta_1$$

Ahora, dividamos la expresión anterior por Δx y tomemos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} T(x + \Delta x, t) \sin \theta_2 - T(x, t) \sin \theta_1 \quad (\text{A.6})$$

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \sin(\theta, t)) \quad (\text{A.7})$$

dado que la pendiente de la curva es pequeña podemos decir que $\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta(x, t)$ y para θ pequeños $\cos \theta \cong 1$, así $\sin \theta \cong \tan \theta$ y la ecuación (A.7) se transforma en:

$$\begin{aligned} \rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \Rightarrow \rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} T(x, t) \end{aligned}$$

Por lo pequeño del ángulo las tensiones son iguales y podemos decir que esta es constante a lo largo de la cuerda y así obtendremos la *La Ecuación de Onda en 1D*.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \frac{T_0}{\rho_0(x)}$$

Apéndice B

Cálculo Operadores Miméticos y Resolución de la EH

```
%Código Para la Generación de los Operadores Diferenciales
%Discretos Divergencia y Gradiente en 1D sobre mallas No-Uniformes,
%para la resolución de la Ecuación de Helmholtz
%Autor: Mairim Colmenares

clear all;
clc;
int k; % Orden k requerido en el operador
int N; % Número de celdas del mallado sobre el
% cual se requiere calcular el Operador
int h; %Tamaño del paso, para los operadores diferenciales
% No-Uniformes este será calculado
% mediante la siguiente ecuación  $h_j=x_{j+1}-x_j$ 

k=1;
while(k~=2)
clc;
```

```
k=input('Introduzca el orden k del Operador : ')
w=input('Introduzca el número de onda w: ')
N=1;
%Condición sobre el número de Celdas del mallado, dependiente del número
%de onda seleccionado.
while N==1
N=input('Introduzca el número de Celdas N : ')
if N< max([9,7*w/(2*pi)])
display ('Introduzca N>= max{9,7w/(2pi)}')
N=1
end
end

switch k
case 2

%Generación del vector de Nodos del mallado
h=1/(N-4);%Tamaño del paso para N-4.
x=[0:h/2:2*h,3*h:h:(N-6)*h,(N-6)*h+h/2:h/2:1]%Vector de Nodos

%Cálculo del paso entre cada nodo del mallado No-Uniforme.
for i=1:length(x)-1
hf(i)=x(i+1)-x(i);
end
hf;

display('Matriz generadora para la Divergencia No-Uniforme:')
SD=sd2(k,N,x)%Función que llama a la matriz generadora
      % para la Divergencia No-Uniforme.
subplot(4,2,1);
```

```
spy(SD);
title('Matriz S para la divergencia No-Uniforme')

%Función que genera la matriz M formada por por matrices de Vandermonde
%para el sistema Ma=r. Esta función tiene como salidas 3 matrices:
% *)Matriz M (generada por matrices de
% Vandermonde y matrices identidades).
% *)Matriz Mred (matriz M con la 2 y 5 fila
% eliminada, ya que el sistema Ma=r original es incompatible).
% *)Matriz Mw (matriz generada con las filas 2 y 5 eliminadas de M).

display(' Matriz M, Mreducida y la Matriz Mw de las filas
eliminadas de M para la Divergencia No-Uniforme son:')

[M,Mred,Mw]=MatrizM(k,N,x)
subplot(4,2,2);
spy(M);
title('Matriz M para la Divergencia No Uniforme de orden 2')
subplot(4,2,3);
spy(Mred);
title('Matriz M Reducida ')

%Construcción del Vector c y d que forman el sistema Ma=r.
c=zeros(k+1,1);
c(2,1)=1;
d=zeros(3*k/2,1);%Vector d que verifica las condiciones de mimeticidad
d(1,1)=-1;
d(k+1,1)=1;
display('El vector r del sistema esta dado por:')
r=[c ;c ;d]%Vector del lado derecho del sistema
rred=r([1 3 4 6 7 8 9]);% Vector r sin las filas 2 y 5
```

```

                                % para el sistema Ma=r.

%Cálculo del Vector a del sistema Ma=r para la divergencia

ad=Mred\rred; %Entradas de la matriz A reducida
                %para la divergencia de orden 2
ADred=zeros(k,k+1);
ADred(1:k-1,1:k+1)=ad(1:k+1,1:1);
ADred(k:k,1:k+1)=ad((3/2)*k+1:(3/2)*k*k,1:1);
display('La la matriz Ared para el divergencia de orden 2 es:');
ADred; % Matriz A para el sistema reducido

%Vector Lambda
LambdaredD= (Mw*ad);
%Matriz de Peso para la divergencia
Q=sparse(N,N);
j=1;
for i=1:k
    Q(i,i)=LambdaredD(i,j);
end
for i=k+1:(N)-(k)
    Q(i,i)=x(i+1)-x(i);
end
j=1;
for i=(N-k)+1:N
    Q(i,i)=LambdaredD((N+1)-i,j);
end
display('Matriz de peso para la Divergencia No-Uniforme de orden 2:')
Q

%Matriz de peso reducida

```

```

Qred=zeros(k,k);
Qred(1:k,1:k)=Q(1:k,1:k);
Qred;

% Cálculo de la Matriz A

%Entradas de la matriz A para la Divergencia No-Uniforme
% que sustituye las k filas y las 3k/2 columnas
% de S.

display('Las entradas de la matriz A para la
divergencia No-Uniforme de orden 2 son:');
AD= inv(Qred)*ADred

%Matriz de Divergencia

display('Las matriz de divergencia de orden 2 está dado por:')
D=sparse(N,N+1);
% Bloque superior de D
D(1:k,1:k+1)=AD;
% filas internas
for i=k+1:N-(k);
    D(i,i)=-1/(x(i+1)-x(i));;
    D(i,i+1)=1/(x(i+1)-x(i));;
end
%Bloque inferior de D
D((N-k)+1:N,(N+1)-k:N+1)=- AD( k:-1:1 , (k+1):-1:1 );
D;
subplot(4,2,4);
spy(D);
title('Operador Divergencia No-Uniforme de Orden 2')

```

```
%Matriz para el gradiente

[SG,y]=sg2(k,N,x);%Función que llama a la matriz generadora S
%para la divergencia,esta función tiene
%como salidas el vector y (Vector de Celdas+Fronteras)
subplot(4,2,5);
spy(SG);
title('Matriz S para el gradiente No-Uniforme')

%Función que genera la matriz M formada por por matrices de Vandermonde
%para el sistema Ma=r. Esta función tiene como salidas 3 matrices:
% *)Matriz MG (generada por matrices de
% Vandermonde y matrices identidades).
% *)Matriz MGred (matriz M con la 2 y 5 fila
% eliminada, ya que el sistema Ma=r original es incompatible).
% *)Matriz MGw (matriz generada con las filas
% 2 y 5 eliminadas de MG).

[MG,MGred,MGw]=MatrizMG(k,N,y);
subplot(4,2,6);
spy(MG);
title('Matriz M para el Gradiente No Uniforme de orden 2')
subplot(4,2,7);
spy(MGred);
title('Matriz M Reducida para el Gradiente')
%Construcción del Vector c y d que forman el sistema Ma=r.
c=zeros(k+1,1);
c(2,1)=1;
d=zeros(3*k/2,1);%vector que verifica las condiciones de mimeticidad
d(1,1)=-1;
```

```
d(k+1,1)=1;
display('El vector r del sistema esta dado por:');
r=[c ;c ;d];%Vector r del lado derecho del sistema Ma=r
rred=r([1 3 4 6 7 8 9]);%Vector r reducido

%Cálculo del Vector a del sistema Ma=r para el gradiente

display('Las entradas de la matriz A reducida para el gradiente :');
%Entradas de la matriz A reducida para el gradiente de orden 2
aGd=MGred\rred;

Ared=zeros(k,k+1);
Ared(1:k-1,1:k+1)=aGd(1:k+1,1:1);
Ared(k:k,1:k+1)=aGd((3/2)*k+1:(3/2)*k*k,1:1);
display('Las matriz A reducida para el gradiente :');
Ared;

%Obtención del Vector Lambda
Lambdared= (MGw*aGd)

%Matriz de peso P para el gradiente.
P=sparse(N+1,N+1);
j=1;
for i=1:k
    P(i,i)=Lambdared(i,j);
end
for i=k+1:(N+1)-(k);
    P(i,i)=y(i+1)-y(i);
end
P(N,N)=Lambdared(k,k-1);
P(N+1,N+1)=Lambdared(k-1,k-1);
```

```
display('Matriz de Peso P para el gradiente :');
P;

%Matriz de Peso reducida
Pred=P([1 2],[1 2]);

%Entradas de la matriz A para la Divergencia No-Uniforme
% que sustituye las k filas y las 3k/2 columnas
% de S.

display('Las entradas de la matriz A para el
gradiente de orden 2 son:');
A= inv(Pred)*Ared;

display('La matriz del Gradiente de Orden 2
No-Uniforme esta dada por:')

G=zeros(N+1,N+2);

%Bloque superior
G(1:k,1:k+1)=A;
%filas internas
for i=k+1:(N+1)-(k);
    G(i,i)=-1/(y(i+1)-y(i));
    G(i,i+1)=1/(y(i+1)-y(i));
end
%Bloque inferior
G((N+1)-(k-1):N+1,N:N+2)=-A( k:-1:1 , (k+1):-1:1 );
G;
subplot(4,2,6);
spy(G);
```

```
title('Operador Gradiente No-Uniforme de Orden 2')

%Cálculo del Operador Frontera que garantiza la verificación del
%Teorema de la Divergencia Generalizada.
%Este operador se obtiene mediante las siguientes operaciones
%          B=QhatDhat+G'P

%Matriz de peso extendida para la Divergencia No-Uniforme
Qhat=zeros(N+2,N+2);
Qhat(1,1)=(y(2)-y(1));
Qhat(2:N+1,2:N+1)=Q;
Qhat(N+2,N+2)=(y(N+2)-y(N+1));
display('Matriz de peso Q extendida')
Q;
display('La matriz de peso Q es de dimensión:')
size(Qhat);

%Matriz de Divergencia Extendida.
Dhat=[zeros(1,(N+1));D;zeros(1,(N+1))];
display('La matriz de Divergencia Extendida es de dimensión:')
size(Dhat)

%Cálculo del Operador B
B=sparse(Qhat*Dhat+(G'*P)); %Operador de Frontera
display('El Operador de Frontera Mimético B es de dimensión:')
size(B);
subplot(4,2,7);
spy(B)
title(' Operador de Frontera Mimético B de orden 2')

% Operador Laplaciano
```

```

Lap=(D*G); %Operador Laplaciano
display('El Operador Laplaciano Mimético es de dimensión:')
size(Lap);
subplot(4,2,8);
spy(Lap);
title('Operador Laplaciano ')

%%Discretización de la Ecuación de Helmholtz en 1D %%
%%descrita por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales
%%   p''+w^2p=0   0<x<1
%%   p'(0)=iw
%%   p'(1)-iwp(1)=0

%% El sistema anterior escrito en función de los operadores
%%diferenciales miméticos No-Uniforme queda descrito mediante:
%%   (Bd+(1/h)BnB1G+(1/h^2)DhatG+w^2Idhat)p=b

% Identidad extendida
Id=eye(N+2);
Id(1,1)=0;
Id(N+2,N+2)=0;
display('La matriz identidad extendida es de orden:')
size(Id);

%Matriz para las condiciones de frontera tipo Neumann
Bn=sparse(N+2,N+2);
Bn(1,1)=-1;
Bn(2,2)=1;
Bn(3,3)=1;
Bn(N,N)=1;
Bn(N+1,N+1)=1

```

```
Bn(N+2,N+2)=1;
display('La matriz con los coeficientes de frontera
tipo Neumann es de dimension:')
size(Bn);

%Matriz para las condiciones de frontera tipo Dirichlet
Bd=sparse(N+2,N+2);
Bd(N+2,N+2)=-w*sqrt(-1);
display('La matriz con los coeficientes de frontera
tipo Dirichlet es de dimensión:')
size(Bd);

%Operador Laplaciano Mimético
LapM=Dhat*G;
size(LapM);
subplot(4,2,5);
spy(LapM);
title('Operador Laplaciano Mimético')

%Vector del lado derecho de la ecuación
b=zeros(N+2,1);
b(1,1)=sqrt(-1)*w;
size(b);

%Construcción de la matriz A del sistema Discreto Mp=b

A=(Bd+Bn*B*G+LapM+w*w*Id)
size(A)

%%Solución Exacta de la Ecuación de Helmholtz
x1=0:pi/(50*w):1
```

```
yexac=cos(w*x1);
yexac;

%%%Solución Aproximada
display=('La solución aproximada para es sistema es:')
yApro=A\b

figure(2)
hold on
plot(x1,yexac,'b',y,yApro,'--r')
legend('Exacta','SolApro')
print grafApro-ExacN5.eps
hold off

%%Cálculo del Error
err=norm(yApro-(cos(w*y)));
h=max([hf])
loglog(h,err,'sm--');

otherwise
display('Introduzca k=2. Pulse Enter para continuar');

pause
end
end
```

Apéndice C

Funciones Generadas para el Cálculo de los Operadores

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%Construcción de la Matriz S generadora para la divergencia%%  
%% Autor:Mairim Colmenares
```

```
function SD=sd2(k,N,x)  
%k= Orden del Operador;  
%N= Número de celdas del mallado sobre el cual se desea calcular el Operador  
%x= Vector de Nodos del mallado No-Uniforme  
format long  
  
if N<5  
display('Introduzca un N mayor o igual 5')  
else  
if length(x)==N+1  
for i=1:length(x)-1  
hf(i)=x(i+1)-x(i);  
end  
hf;
```

```

for i=1:N
    SD(i,i)=-1/(x(i+1)-x(i));
    SD(i,i+1)=1/(x(i+1)-x(i));
end

else
    display('Introduzca un vector x de tamaño N+1')
end
end
return;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Construcción de la Matriz M de la divergencia para el sistema Ma=r%%
%% Autor:Mairim Colmenares

function [M,Mred,Mw]=MatrizM(k,N,x)
%k= Orden del Operador;
%N= Número de celdas del mallado sobre el cual se desea calcular el Operador
%x= Vector de Nodos del mallado No-Uniforme
format long

if N<5
display('Introduzca un N mayor o igual 5')
else
filas=(k*(k+1)+3/2*k); %Número total de filas del Operador de Divergencia
columnas=3/2*(k*k); %Número total de columnas del Operador Divergencia
end

i=1;
for j=1:3*k/2

```

```

M(i,j)=1;
for r=2:k+1
for m=1:3*k/2-1
M(r,i)=((x(m)/2)-(x(m+1)/2))^(r-1);
M(r,i+1)=((x(m+1)/2)-(x(m)/2))^(r-1);
M(r,i+2)=(x(m+1)-x(i+1)/2-x(i)/2)^(r-1);
end
end
end

i=1;
for j=(3*k/2)+1:columnas
M(i+(3*k/2),j)=1;
for r=(3*k/2)+1:columnas-1
for p=3*k/2:filas-(k+3)
M(p+2,3*k/2+1)=(x(k-1)-x(k)/2-x(k+1)/2)^(p-k);
M(p+2,3*k/2+2)= (x(k)/2 -x(k+1)/2)^(p-k);
M(p+2,3*k/2+3)= (-x(k)/2 +x(k+1)/2)^(p-k);
end
end
end

i=k*(k+1)+1;
for j=1:k+1:3*k/2-1
for r=0:3*k/2-1
M(i+r,j+r)=1;
end
end

i=k*(k+1)+1;
for j=3*k/2+1

```

```

for r=0:3*k/2-1
M(i+r,j+r)=1;
end
end

%%%Matriz M reducida sin las filas 2 y 5

Mred(1:1,1:(3/2)*k*k)=M(1:1,1:(3/2)*k*k);
Mred(2:3,1:(3/2)*k*k)=M(3:4,1:(3/2)*k*k);
Mred(4:k*(k+1)+(3/2)*k-2,1:(3/2)*k*k)=M(6:filas,1:(3/2)*k*k);

%%%Matriz formada por las filas eliminadas de M

Mw(1:1,1:columnas)=M(2:2,1:(3/2)*k*k);
Mw(2:2,1:columnas)=M(5:5,1:(3/2)*k*k);
return;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Construcción de la Matriz S generadora para el gradiente%%
%% Autor:Mairim Colmenares

function [SG,y]=sg2 (k,N,x)
% k= Orden del Operador;
%N= Número de celdas del mallado sobre el cual se desea calcular el Operador
%clc;
format long

if N<5
display('Introduzca un N mayor o igual 5')
else
if length(x)<N+1

```

```
display ('Introduzca un vector x de tamaño N+1')
end
end

p=zeros(1,length(x)-1);
for i=1:length(x)-1
p(i)=(x(i+1)+x(i))/2;
end

%Vector de celdas + fronteras
y=zeros(N+2,1);
y(1,1)=x(1,1);
y(2:N+1,1)=p(1,1:N);
y(N+2,1)=x(1,N+1);
display('Vector de Celdas+ Fronteras')
y

for j=1:k
    SG(j,j)=-2/(y(i+1)-y(i));
    SG(j,j+1)=2/(y(i+1)-y(i));
end

for i=k:N
    SG(i,i)=-1/(y(i+1)-y(i));
    SG(i,i+1)=1/(y(i+1)-y(i));
end

for j=N+1
    SG(j,j)=-2/(y(i+1)-y(i));
    SG(j,j+1)=2/(y(i+1)-y(i));
end
```

```

display('Matriz S para el gradiente No-Uniforme de orden 2')
SG=sparse(SG)
return;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Construcción de la Matriz M del gradiente para el sistema Ma=r%%
%% Autor:Mairim Colmenares

function[MG,MGred,MGw]=MatrizMG(k,N,y)
%k=Orden del Operador.
%N=Número de celdas del mallado sobre el cual se desea calcular el Operador.
%y=Vector que contiene las celdas + las fronteras del mallado.
format long

if N<5
display('Introduzca un N mayor o igual 5')
else
filas=(k*(k+1)+3/2*k); %Número total de filas del Operador de Divergencia
columnas=3/2*(k*k); %Número total de columnas del Operador Gradiente
end

%1
i=1;
for j=1:3*k/2
    MG(i,j)=1;
for p=1:k
    MG(p+1,i)=0;
for r=1:k
    MG(p+1,r+1)=(y(r+1)-y(i))^(p);

```

```

end
p=p;
end
end
i=1;

%2
for j=(3*k/2)+1:columnas
    MG((3*k/2)+1,j)=1;
for w=3*k/2:2*k
    MG(w+2,3*k/2+1)=(2*y(w-(w-1))-2*y(w-(w-2)))^(w-(k));
    MG(w+2,columnas-1)=(-y(w-(w-2))+y(w-(w-1)))^(w-(k));
    MG(w+2,columnas)=(y(k+1)-2*y(w-(w-2))+y(w-(w-1)))^(w-(k));
end
end

%%%%
i=k*(k+1)+1;
for j=1:k+1:3*k/2-1
for r=0:3*k/2-1
    MG(i+r,j+r)=1;
end
end
i=k*(k+1)+1;
for j=3*k/2+1
for r=0:3*k/2-1
    MG(i+r,j+r)=1;
end
end
%%%%

```

```
%Matriz M reducida

MGred=zeros(k*(k+1)+(3/2)*k-2,(3/2)*k*k);
MGred(1:1,1:(3/2)*k*k)=MG(1:1,1:(3/2)*k*k);
MGred(2:3,1:(3/2)*k*k)=MG(3:4,1:(3/2)*k*k);
MGred(4:k*(k+1)+(3/2)*k-2,1:(3/2)*k*k)=MG(6:filas,1:(3/2)*k*k);

%Matriz formada por las filas eliminadas de M

MGw=zeros(k,(3/2)*k*k);
MGw(1:k-1,1:(3/2)*k*k)=MG(k:k,1:(3/2)*k*k);
MGw(k:k,1:(3/2)*k*k)=MG(3*k-1:3*k-1,1:(3/2)*k*k);

sparse(MG)
sparse(MGred)
sparse(MGw)
return;
```

Apéndice D

Códigos Diferencia Finita

En las siguientes líneas mostraremos los códigos generados para la resolución de la *Ecuación de Helmholtz* mediante un método de Diferencias Finitas. Se mostrarán tres códigos uno para $N = 9$, otro para $N = 10$ y otro para $N \geq 11$.

```
%%Código de Diferencias Finitas para N=9%%
clear all
N=9;
kk=sqrt(-1);
w=2*pi;

h=1/(N-4);%Tamaño del paso para la
%generación del vector de puntos.
x=[0:h/2:2*h,3*h:h:(N-6)*h,(N-6)*h+h/2:h/2:1]
p=zeros(1,length(x)-1);
for i=1:length(x)-1
p(i)=(x(i+1)+x(i))/2;
end
y=zeros(N+2,1);
y(1,1)=x(1,1);
```

```

y(2:N+1,1)=p(1,1:N);
y(N+2,1)=x(1,N+1);
display('Vector de Celdas+ Fronteras')
y

%Operador que contienen las condiciones de frontera
A=[2*[-8 9 -1 zeros(1,N-1)];zeros(N,N+2)
;[zeros(1,N-1) 2*1 -2*9 (2*8-kk*w*3*h)]]
%Matriz que genera las entradas de diferencias finitas centrada
Aux=[diag(ones(N+2,1))-2*diag(ones(N+1,1),1)+diag(ones(N,1),2)];
%Operador D que discretiza la ecuación de EH
D=[ zeros(1,N+2)];%x1
4*[16/5 -5 2 -1/5 zeros(1,N-2)];%x3/2
4*Aux(2:3,:);%x5/2 x7/2
4*[0 0 1/7 2/5 -1 16/35 zeros(1,N-4)];%x9/2
(16/9)*Aux(5:N-4,:);%x11/2
4*[zeros(1,N-4) 16/35 -1 2/5 1/7 0 0]; %x13/2
4*Aux(N-2:N-1,:);%x15/2 y x17/2
4*[zeros(1,N-2) -1/5 2 -5 16/5];%x19/2
zeros(1,N+2)]%x10

%Operador que permite generar la segunda
%expresión del lado izquierdo de la
%ecuación.

I=eye(N+2,N+2);
I(1,1)=0;
I(N+2,N+2)=0;
I

%Vector de entradas del lado derecho de la ecuación

```

```

b=zeros(N+2,1);
b(1)=kk*w*3*h;

%Solución Aproximada

y1=(A+((1/h)^2)*D+w^2*I)\b

%Solución Exacta

x1=0:pi/(50*w):1;
yexac=cos(w*x1);
plot(y,y1,'r',x1,yexac,'b')
title('DifDivN9orden2');

```

Para $N = 10$ y $N \geq 11$ lo unico que se modifica del código anterior es la matriz D que contiene las entradas de las fórmulas de diferencias finitas, debemos recordar que en estos casos es donde se incorporan los pasos completos en el centro del mallado. Estos operadores son mostrados a continuación:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Operador D para N=10%%
D=[ zeros(1,N+2);
4*[16/5 -5 2 -1/5 zeros(1,N-2)];
4*Aux(2:3,:);
4*[0 0 1/7 2/5 -1 16/35 zeros(1,N-4)];
4*[0 0 0 (8/90) (8/42) -(8/15) (16/63) zeros(1,N-5)];
4*[zeros(1,N-5) (16/63) -(8/15) (8/42) (8/90) 0 0 0];
4*[zeros(1,N-4) (16/35) -1 (2/5) (1/7) zeros(1,N-8)];

```

```

4*Aux(N-2:N-1, :);
4*[zeros(1,N-2) -1/5 2 -5 16/5];
zeros(1,N+2)]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%Operador D para N>=11%%%
D=[ zeros(1,N+2);
4*[16/5 -5 2 -1/5 zeros(1,N-2)];
4*Aux(2:3, :);
4*[0 0 1/7 2/5 -1 16/35 zeros(1,N-4)];
4*[0 0 0 (8/90) (8/42) -(8/15) (16/63) zeros(1,N-5)];
Aux(N-5:N-5, :);
4*[zeros(1,N-5) (16/63) -(8/15) (8/42) (8/90) 0 0 0];
4*[zeros(1,N-4) (16/35) -1 (2/5) (1/7) 0 0];
4*Aux(N-2:N-1, :);
4*[zeros(1,N-2) -1/5 2 -5 16/5];
zeros(1,N+2)]

```

Apéndice E

Código para el cálculo del error

```
%%Programa para realizar el estudio de convergencia de los  
%%métodos utilizados.
```

```
logerrh=-log(errh(1:end));  
logerr=-log(err(1:end));  
xi=[logerrh(1):0.001:logerrh(end)];  
yi=interp1(logerrh,logerr,xi);  
plot(xi,yi,logerrh,logerr,'o','markersize',8,  
      'markerfacecolor','b','LineWidth',2)  
fp=input('Ingresa el indice a partir del cual se va  
        realizar el calculo de la pendiente: ');  
logerrh=-log(errh(fp:end));  
logerr=-log(err(fp:end));  
xi=[logerrh(fp):0.001:logerrh(end)];  
p=polyfit(logerrh,logerr,1);  
p
```

Apéndice F

Operadores Discretos No-Uniformes en 1D

```
%%%%%DIVERGENCIA MIMÉTICA%%%%%%%%%
```

```
> restart;  
> with(linalg):  
> with(plots):  
> with(LinearAlgebra):  
> N:=5: Número de Celdas del Mallado  
> filas:=N: Número de Filas del Operador Divergencia  
> columnas:=(N+1): Número de Columnas del Operador Divergencia  
>  
> Div:=RandomMatrix(filas,columnas,density=0):  
> cont1:=1:  
>  
Estructura del Operador Divergencia No-Uniforme
```

```
> i:=1:
```

```
> j:=1:
```

```

> while i<=(filas) do
>     if (i=cont1*N+1) then
>         j:=i+cont1:
>         cont1:=cont1+1:
>     end if :
>     Div[j,i]:=-1/(x[i+1]-x[i]);
>     Div[j,i+1]:=1/(x[i+1]-x[i]);
>     i:=i+1;
>     j:=j+1;
> end do :
>
>
> V1:=array(1..columnas,1..1):
> for t from 1 to (N+1) do
>     V1[t,1]:=x[t];
> end do :
>
>
>
> DivV1:=evalm(Div&*V1):
> simplify(%);

```

```

[1]
[ ]
[1]
[ ]
[1]
[ ]
[1]
[ ]
[1]
[ ]
[1]

```

```

> V2:=array(1..columnas,1..1):
>   for t from 1 to (N+1) do
>     V2[t,1]:=x[t]^2;
>   end do :
>
>
>
> DivV2:=evalm(Div&*V2):
> simplify(%);

```

```

[x[2] + x[1]]
[           ]
[x[2] + x[3]]
[           ]
[x[3] + x[4]]
[           ]
[x[4] + x[5]]
[           ]
[x[5] + x[6]]

```

```

%%%GRADIENTE MIMÉTICO%%%

```

```

> restart;
> with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> N:=5:   Número de celdas del mallado sobre el cual se desea
          calcular el Operador Gradiente
> filas:=(N+1):   Número de filas del Operador Gradiente
> columnas:=(N+2):   Número de columnas del Operador Gradiente

```

```
>
> Grad:= RandomMatrix(filas,columnas,density=0):
```

Estructura del Operador Gradiente No-Uniforme

```
> i:=1:
> for j from 1 to 1 do
> Grad[i,j]:=(-2*x[1]-x[5/2]-x[3/2])/((x[3/2]-x[1])*(x[5/2]-x[1]));
> Grad[i,j+1]:=(x[5/2]-x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[3/2]-x[1]));
> Grad[i,j+2]:=(-x[3/2]+x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[5/2]-x[1]));
>
> Grad[i+1,j]:=(-2*x[1]+3*x[3/2]-x[5/2])/((x[3/2]-x[1])*(x[5/2]-x[1]));
> Grad[i+1,j+1]:=(x[5/2]-4*x[3/2]+3*x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[3/2]-x[1]));
> Grad[i+1,j+2]:=(3*x[3/2]-3*x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[5/2]-x[1]));
> end do:
>
> for j from 3 to (columnas-3) do
> Grad[j,j]:=-1/(x[1/2+j]-x[1/2+(j-1)]);
> Grad[j,j+1]:=1/(x[1/2+j]-x[1/2+(j-1)]);
end do :
> i:=filas-1:
for j from columnas-2 to columnas-2 do
> Grad[i,j]:=(-2*x[1]-x[5/2]-x[3/2])/((x[3/2]-x[1])*(x[5/2]-x[1]));
> Grad[i,j+1]:=(x[5/2]-x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[3/2]-x[1]));
> Grad[i,j+2]:=(-x[3/2]+x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[5/2]-x[1]));
>
> Grad[i+1,j]:=(-2*x[1]+3*x[3/2]-x[5/2])/((x[3/2]-x[1])*(x[5/2]-x[1]));
> Grad[i+1,j+1]:=(x[5/2]-4*x[3/2]+3*x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[3/2]-x[1]));
> Grad[i+1,j+2]:=(3*x[3/2]-3*x[1])/((x[5/2]-x[3/2])*(x[5/2]-x[1]));
> end do:
>
```

```
> f:=array(1..columnas,1..1):
>   for i from 1 to N do
>     f[1,1]:=x[1]^n;
>     f[i+1,1]:=(x[i+1]^n+x[i]^n)/2;
f[columnas,1]:=x[columnas-1]^n;
>     end do :
f:=evalm(f):
>
>
> Graf:=evalm(Grad*f):
> simplify(%):
>
>
> f:=array(1..columnas,1..1):
>   for i from 1 to N do
>     f[1,1]:=x[1]^2;
>     f[i+1,1]:=(x[i+1]^n+x[i]^2)/2;
>     end do :
f:=evalm(f);
>
>
> Graf:=evalm(Grad*f):
> simplify(%):
```

Bibliografía

- [1] Orestes Montilla, Carlos Cadenas, and José Castillo. *Matrix approach to mimetic discretizations for differential operators on non-uniform grids. Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 73:215–225, 2006.
- [2] A. Samarskii, V. Tishkin, A. Favorski, M. Shaskov, and Yu. *Employment of the Reference-Operator Method in the Construction of Finite Difference Analogs Of tensor Operations. Diff. Eqns.*, 18, 7, pages 881–885, 1982.
- [3] José E. Castillo and R. D. Grone. *A Matrix Analysis Approach to Higher-Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law. SIAM J. MATRIX ANAL*, No. 1, Vol. 25:128–142, 2003.
- [4] José Castillo and Mark Yasuda. *Linear Systems Arising for Second Order Mimetic Divergence and Gradient Discretizations. Kluwer Academic Publishers*, page 18, 2003.
- [5] Carlos Cadenas and Orestes Montilla. *Matriz de Vandermonde generalizada para la construcción de los operadores de divergencia discreta mimética. REVISTA INGENIERIA*, No. 2, Vol. 11:48–52, 2004.
- [6] Mikhail Shashkov and Stanly Steinberg. *Solving Diffusion Equations with Rough Coefficients in Rough Grids. Journal of Computational Physics*, 129:383–405, 1996.

BIBLIOGRAFÍA

- [7] James M. Hyman and Mikhail Shashkov. *Approximation of Boundary Conditions for Mimetic Finite-Difference Methods*. *Computers Math. Applic.*, Vol 36, No. 5:79–99, 1998.
- [8] Juan Rodríguez. *Aplicación del Método de Diferencias Finitas Miméticas a un Problema de Dispersión de Ondas en 1-D*, trabajo de grado (lic. en computación). *Universidad de Carabobo-Venezuela, Facultad de Ciencias y Tecnología*, 2003.
- [9] Carlos Cadenas and Vianey Villamizar. *Comparison of Least Squares FEM, Mixed Galerkin FEM and an Implicit FDM Applied to Acoustic Scattering*. *Appl. Numer. Anal. Comput. Matemáticas*, Vol. 1:128–139, 2004.
- [10] Carlos Cadenas, Javier Rojas, and Vianey Villamizar. *A Least squares finite element method with high degree element shape functions for one-dimensional Helmholtz equation*. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 73:76–86, 2006.
- [11] Franzyuri Hernández y Carlos Buchart. *Discretización de la Ecuación Escalar de Convección-Difusión Utilizando Métodos Miméticos*. *SVMNI*, pages CT27–CT35, 2006.
- [12] José Castillo Franzyuri Hernández and German Larrazábal. *Large sparse linear systems arising from mimetic discretization*. *Computers and Mathematics with applications*, Vol 53, 2007.
- [13] Blaidés Luis A. *Operadores Diferenciales Discretos Miméticos en Dos Dimensiones Sobre Mallados Tensoriales Uniformes*, Trabajo de Grado (Lic. en Matemática). *Universidad de Carabobo-Venezuela, Facultad de Ciencia y Tecnología*, 2007.
- [14] Mikhail J. Shashkov. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. Edition by Stanley Steimberg, Boca Raton, FL, 1996. With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch).

- [15] John M. Mathews and Kurtis D. Fink. *Metodos Numericos con Matlab*. Madrid, 2000.
- [16] A. L. Andrew. *Centrosymmetric Matrices*. *SIAM, Rev.* 40, pages 697–699, 1998.
- [17] Franzyuri Hernández. *Estudio de los Sistemas Lineales Dispersos Provenientes de Discretizaciones Miméticas, Trabajo Especial de Maestría*. Universidad de Carabobo, Maestría en Matemática y Computación, Facultad de Ingeniería., 2005.
- [18] Mark Ainsworth. *Discrete Dispersion Relation for hp-Version Finite Element Approximation at High Wave Number*. *SIAM, J. Numer. Anal*, 42:553–575, 2004.
- [19] José Mellado y Marco Vera. *Introducción a los Conceptos Fundamentales de la Acústica*. 2005.