

*Operadores Diferenciales Discretos Miméticos
en Dos Dimensiones Sobre Mallados
Tensoriales Uniformes*

Luis A. Blaidés F.

30 de septiembre de 2007



Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas



*Operadores Diferenciales Discretos Miméticos
en Dos Dimensiones Sobre Mallados
Tensoriales Uniformes*

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo por
el **Br. Luis A. Blaidés** para optar al título de Licenciado en Matemáticas.

Tutor: Prof. Orestes Montilla

Cotutor: Prof. Carlos Cadenas

Valencia, Venezuela
30 de septiembre de 2007

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad de Carabobo como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Operadores Diferenciales Discretos Miméticos en Dos Dimensiones Sobre Mallados Tensoriales Uniformes**”, presentado por el **Br. Luis A. Blaidés**, titular de la Cédula de Identidad **15.428.812**, certificamos que éste cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

Prof. Orestes Montilla
Tutor

Prof. Lenys Bello
Jurado

Prof. Máximo Mero
Jurado

DEDICATORIA

A Jehová Dios.

A mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Necesariamente debo comenzar dando gracias a **Jehová Dios**, quien se ha convertido en parte importante de mi vida y sin quien no hubiese podido obtener este logro, ni algún otro, además por supuesto de mi madre **Xiomary Ferrer De Blaidés** y mi padre **Luis B. Blaidés**. Es en este punto innegable la existencia de Dios y de las bendiciones que derrama sobre los seres humanos...sólo con su ayuda se podría conseguir padres tan maravillosos, y no puedo en este instante decir a ellos más que...¡gracias Vieja!, ¡gracias Pape!

Imperdonable me sería, no agradecer también a los profesores y compañeros estudiantes en general del Departamento de Matemáticas, ya que todos han colaborado de una u otra forma con mi formación; sin embargo, en este sentido debo hacer un paréntesis para particularizar mis agradecimientos...a mis tutores y amigos **Orestes Montilla** y **Carlos Cadenas**, quienes no sólo me guiaron a través de la travesía del Trabajo Especial de Grado, sino que me ayudaron a crecer como persona, ayudando a nacer en mí un sentimiento ético invaluable. A mi también profesor y amigo **José G. Marciano**, quien se dió a la laboriosa tarea de sacar el Departamento adelante, y de quien, al igual que en el caso de mis tutores, aprendí valores más allá de lo ético.

Al particularizar mis agradecimientos para algunos profesores, debo también hacerlo entre mis compañeros, dando mención especial a **Mairim Colmenares** (la flaca), mi amiga...mi hermana. Sin su apoyo incondicional difícil habría sido el camino recorrido.

AGRADECIMIENTOS

A mi amiga y secretaria del Departamento de Matemáticas **Herminia de Mendoza**, por tolerar todos mis bochinchos y molestias ocasionadas en su tiempo libre, al igual que mostrarme siempre su disposición a colaborar no sólo conmigo, sino con todos mis compañeros...¡Gracias!

Luis Alejandro Blaidés Ferrer

RESUMEN

Recientes investigaciones de Castillo y Grone [1], condujeron al diseño de una técnica basada en el análisis matricial para la construcción de versiones discretas miméticas de los operadores diferenciales gradiente y divergencia de orden superior, tanto en el interior del mallado como en la frontera.

En el año 2006 *Montilla-Cadenas-Castillo* [2] presentan resultados en donde generalizan el método de *Castillo-Grone*, logrando así obtener operadores diferenciales (divergencia y gradiente) para un orden k cualquiera. Cabe destacar que los trabajos antes mencionados fueron desarrollados para el caso unidimensional.

En este trabajo se realizó una extensión del método de *Montilla-Cadenas-Castillo* al caso bidimensional sobre mallados tensoriales uniformes, prestando especial atención a la construcción de algoritmos de cálculo que permiten obtener los operadores diferenciales divergencia, gradiente, laplaciano y de frontera con un orden de aproximación $k = 2$ y $k = 4$ en el caso de la divergencia y el gradiente.

Palabras claves: discretización mimética, operadores diferenciales discretos, diferencias finitas.

Índice general

DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTOS	V
RESUMEN	VII
INTRODUCCIÓN	2
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.1. Antecedentes	4
1.2. Justificación	6
1.3. Objetivos	8
1.3.1. Objetivo General	8
1.3.2. Objetivos Específicos	8

ÍNDICE GENERAL

2. MÉTODOS MIMÉTICOS	10
2.1. CONCEPTOS BÁSICOS	11
2.2. Método de Montilla-Cadenas-Castillo	21
2.2.1. Esquema de Discretización Mimética	21
2.2.2. Productos Internos Generalizados	27
2.2.3. Técnica Matricial para Operadores Discretos Miméticos	27
2.2.4. Sistema Lineal $Ma = r$	32
2.2.5. Funciones de Prueba para la Divergencia	35
2.2.6. Funciones de Prueba para el Gradiente	42
2.3. Operadores Miméticos de Segundo Orden en $1D$	46
2.3.1. Divergencia Mimética	47
2.3.2. Gradiente Mimético	49
2.4. Operadores Miméticos de Cuarto Orden en $1D$	53
2.4.1. Divergencia Mimética	54
2.4.2. Gradiente Mimético	57
2.5. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DISCRETA GENERALIZADA	62

ÍNDICE GENERAL

2.5.1. Segundo Orden	64
2.5.2. Cuarto Orden	65
2.6. OPERADOR LAPLACIANO DISCRETO	67
3. OPERADORES DIFERENCIALES DISCRETOS MIMÉTICOS EN $2D$	69
3.1. Operadores de Segundo Orden en $2D$	69
3.1.1. Divergencia Mimética de Segundo Orden	70
3.1.2. Gradiente Mimético de Segundo Orden	76
3.1.3. Operador de Frontera	83
3.1.4. Operador Laplaciano	83
3.2. Operadores de Cuarto Orden en $2D$	84
3.2.1. Divergencia Mimética de Cuarto Orden	84
3.2.2. Gradiente Mimético de Cuarto Orden	95
3.2.3. Operador de Frontera	108
3.2.4. Operador Laplaciano	109
3.3. Estudio del Orden de Convergencia de los Operadores	110
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	121

ÍNDICE GENERAL

A. OPERADORES DE SEGUNDO ORDEN EN 1D: CÁLCULOS	123
B. OPERADORES DE CUARTO ORDEN EN 1D : CÁLCULOS	126
C. CÁLCULO DE LA MATRIZ UNIDIMENSIONAL B	132
D. FÓRMULAS DE DIFERENCIAS FINITAS	135
E. OPERADORES DE SEGUNDO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MATLAB	137
F. OPERADORES DE CUARTO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MATLAB	143
G. OPERADORES DE SEGUNDO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MAPLE	152
H. OPERADORES DE CUARTO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MAPLE	159
I. OPERADOR DE FRONTERA Y LAPLACIANO EN 2D: CÁLCULOS MATLAB	170
BIBLIOGRAFÍA	174

INTRODUCCIÓN

En el mundo de la ingeniería, como en muchos otros campos del saber, aparecen un gran número de problemas que son representados mediante sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. En virtud a la dificultad que constituye usualmente resolver estos sistemas de forma analítica, la técnica general de resolución es discretizarlos para luego proceder a aplicar alguna estrategia numérica, entre las que podemos contar: diferencias finitas, elementos finitos, teoría espectral, etc. De tal forma que hoy día se hacen simulaciones de dinámicas de sólidos y líquidos, ondas de choque, ecuaciones de calor entre otras, debido esto no sólo al desarrollo de estas técnicas, sino también al enorme desarrollo que han sufrido los sistemas computacionales.

Es bastante conocido que el cálculo vectorial es una poderosa herramienta para describir los problemas referidos. Entre sus agentes de acción más relevantes se cuentan los operadores lineales *divergencia*, *gradiente* y *rotacional*; de tal forma que la gran mayoría de los fenómenos de la Física se expresan en función de estos. Así, en los últimos años ha cobrado fuerza la idea de abordar estos problemas directamente en un medio discreto que aproxime al continuo. Esta nueva concepción se agrupa generalmente bajo el nombre de “discretizaciones miméticas de la mecánica del medio continuo”, y se caracterizan en que en lugar de discretizar sistemas de ecuaciones, más bien, discretizan a la teoría del continuo (cálculo diferencial e integral). De esta manera los problemas diferenciales quedan transformados en sistemas de ecuaciones algebraicas.

La motivación para el estudio de los métodos miméticos, en parte, consiste en que los métodos clásicos y particularmente los métodos elementales, modelan erróneamente

INTRODUCCIÓN

los operadores diferenciales o tienen una inestabilidad prolongada, mientras que los métodos miméticos pueden remover estos problemas, lo que ha hecho que las ideas miméticas hayan tenido un gran impacto en los métodos numéricos.

Este trabajo está enmarcado dentro de esta nueva corriente y sigue sus mismos planteamientos teóricos. Se pretende extender la metodología de *Montilla-Cadenas-Castillo* al caso bidimensional sobre un mallado tensorial uniforme. La idea es establecer un cálculo práctico sobre un medio discreto, dedicando especial atención a la construcción de los algoritmos de cálculo que permitan la obtención de los operadores diferenciales *divergencia*, *gradiente*, *laplaciano* y de *frontera*.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Antecedentes

En la última década se han venido desarrollando técnicas relacionadas con los métodos miméticos que han resultado en un buen número de artículos publicados al respecto en esta área.

Presentaremos un resumen de algunos de los trabajos de mayor influencia:

1. En 1995 José E. Castillo y otros [3] derivan nuevas discretizaciones miméticas de cuarto orden para la divergencia, el gradiente y el laplaciano sobre mallados no-uniformes a partir de una combinación del método de Operadores de Referencia con la técnica del *mapeo*. Cabe mencionar que este es el segundo artículo en este contexto que emplea el término mimético. La primera vez fue un artículo de James M. Hyman y J. C. Scovel [4] publicado en 1988.
2. En 1996 Mikhail J. Shashkov y Stanly Steinberg [5] desarrollan nuevas técnicas de diferencias finitas que permiten la resolución de ecuaciones de difusión con

coeficientes complejos sobre mallados rectangulares generales.

3. En 1997 James M. Hyman y Mikhail J. Shashkov [6] dan a conocer un trabajo en el cual usan el *método de operadores de referencia* para derivar aproximaciones para la *divergencia*, el *gradiente* y el *rotacional* usando análogos discretos de las identidades integrales satisfechas por los operadores diferenciales, que servirán para obtener y entender el *método de diferencias finitas miméticas*.
4. En 1998 James M. Hyman y Mikhail J. Shashkov [7] describen como incorporar las condiciones de frontera dentro de los métodos de diferencias finitas, además de construir métodos de diferencias finitas seguros para aproximar las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de difusión del campo magnético, usando análogos discretos de operadores diferenciales que satisfacen las identidades y teoremas del cálculo vectorial y tensorial en forma discreta.
5. En el año 2001 Castillo y otros [8], derivan aproximaciones de diferencia finita de cuarto y sexto orden para los operadores de divergencia y gradiente. Para lograrlo definen un producto interno generalizado sobre mallados escalonados unidimensionales. Además, se explica de forma detallada como obtener estos operadores discretos a partir del teorema de la divergencia discreta.
6. En el año 2003 José E. Castillo y R. D. Grone [1] presentan un enfoque matricial para la generación de operadores miméticos para la divergencia y el gradiente basado en la discretización escalonada uniforme de un dominio unidimensional.
7. En el año 2004 M. Freites-Villegas y otros [9] utilizan operadores de segundo orden obtenidos por Castillo-Grone [1], en conjunto con el método de la función de Green, para obtener un nuevo algoritmo que permita resolver la ecuación de difusión con una convergencia óptima para toda clase de funciones. Demuestran

que las predicciones teóricas y los resultados numéricos coinciden en todos los problemas de la prueba, tanto en una como en dos dimensiones.

8. En el año 2004 C. Cadenas y O. Montilla [10] desarrollan una generalización de las entradas de las matrices de Vandermonde que son necesarias para la construcción del operador diferencial discreto mimético de divergencia de orden superior, la cual cumple con un teorema análogo en espacios discretos al teorema de divergencia clásico en 1D. El resultado obtenido es aplicado a casos particulares en mallados escalonados uniformes y no uniformes.
9. En el año 2006 Franzyuri F. Hernandez [11], en su tesis de maestría muestra un estudio numérico de distintos esquemas de discretización en diferencias finitas correspondientes al operador escalar de convección-difusión, en una y dos dimensiones, para la aproximación de sus derivadas. Algunos de estos esquemas usan el método de Operadores de Referencia y las técnicas de Castillo-Grone-Yasuda, basándose en la aproximación lateral para el gradiente en nodos ubicados en la frontera del mallado y en aproximaciones centradas para la divergencia en las celdas del mismo.
10. En el año 2006 Orestes Montilla, Carlos Cadenas y José Castillo [2] muestran una generalización de la técnica desarrollada por Castillo-Grone [1] para la obtención de los operadores (divergencia y gradiente) sobre mallados no uniformes.

1.2. Justificación

Es sabido que las ecuaciones diferenciales son usadas para modelar fenómenos físicos, ecuaciones que en la mayoría de los casos no tienen solución analítica, por lo que se hace necesario obtener la solución numérica de las mismas (ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales). Dichas ecuaciones (al menos gran parte de ellas) pueden ser expresadas en términos de los operadores diferenciales invariantes de primer orden, tales como la divergencia y el gradiente o de segundo

orden como el laplaciano. Esta característica de dichas ecuaciones, es de suma importancia, dada la posibilidad de construir esquemas de *diferencias finitas* en base a los operadores discretos de divergencia y gradiente; sin embargo, generalmente los operadores discretos clásicos no mantienen algunas propiedades físicas relevantes de los operadores continuos. Dada la necesidad de preservar dichas propiedades, se han venido desarrollando en los últimos años, métodos que permitan la obtención de tales operadores, pero que a la vez satisfagan las propiedades físicas; a saber, las *leyes de conservación* y la *simetría*, además de los teoremas tradicionales del cálculo vectorial, como lo es el *teorema de la divergencia*, entre otros.

En un esfuerzo por satisfacer las necesidades antes mencionadas, en la década de los 80 fueron publicados los trabajos pioneros [12, 13, 14]. En estos se presentan aspectos fundamentales del *método de operadores de referencia* y se hace una aplicación del mismo a ecuaciones de difusión en campos magnéticos. En la década siguiente se destacan nuevos trabajos [15, 3], en los que se modifica levemente el *método de operadores de referencia*. En el año 1996, Shaskov publica el único libro conocido sobre el *método de operadores de referencia* [16], en donde recopila toda la información existente, para el momento, en dicha área.

A principios de 2003, Castillo y Grone [1] publican uno de los trabajos de mayor importancia en el área. En este muestran un enfoque matricial para la generación de operadores miméticos para la divergencia y el gradiente, basados en la discretización escalonada uniforme de un dominio unidimensional. Aplican la técnica y obtienen los operadores unidimensionales de orden $2-2-2$ y $4-4-4$.

Orestes Montilla [17] hace una generalización de la metodología para mallados unidimensionales no-uniformes y $6-6-6$ para mallados uniformes.

El paso siguiente en el desarrollo del área, sería hacer la extensión a mallados de dimensiones superiores. Aunque se han hecho algunos intentos, los cálculos han sido más bien eurísticos. En esta investigación se tratará de desarrollar una técnica que permita obtener operadores diferenciales miméticos (*divergencia*, *gradiente* y

laplaciano) bidimensionales sobre un mallado tensorial uniforme de una manera natural.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Desarrollar un conjunto de herramientas computacionales que permitan calcular los operadores miméticos sobre un mallado tensorial uniforme, utilizando una adaptación de la metodología de *Montilla-Cadenas-Castillo*.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Analizar la teoría existente de construcción de operadores diferenciales miméticos, por medio de una revisión bibliográfica.
2. Construir operadores diferenciales miméticos de primer orden (divergencia y gradiente) sobre mallados tensoriales uniformes en $2D$ basados en la metodología de construcción de operadores diferenciales unidimensionales para mallados intercalados *no-uniformes* desarrollados por *Montilla-Cadenas-Castillo*.
3. Construir el operador laplaciano mimético usando los operadores diferenciales miméticos de primer orden sobre mallados tensoriales uniformes en $2D$, el cual sustituye al operador laplaciano continuo en las discretizaciones miméticas.
4. Implementar el código fuente necesario para la construcción de los operadores miméticos de divergencia, gradiente, laplaciano y de frontera a partir de los resultados obtenidos en los objetivos 2 y 3, para que estén disponibles con la finalidad de resolver ecuaciones diferenciales que involucren dichos operadores diferenciales continuos.

5. Justificar de acuerdo a la metodología de *Montilla-Cadenas-Castillo* la construcción de los operadores diferenciales obtenidos con la finalidad de dar formalismo a los cálculos realizados.
6. Hacer el estudio de orden de aproximación de los operadores obtenidos mediante el uso de polinomios en dos variables.

Capítulo 2

MÉTODOS MIMÉTICOS

Un método numérico, se denomina *mimético* si los operadores diferenciales discretos emulan propiedades de sus análogos de la teoría del continuo. En el esquema en diferencia finita mimético, las ecuaciones discretas retienen propiedades que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales original.

Como la gran mayoría de las ecuaciones que modelan fenómenos de la Física involucran operadores diferenciales invariantes de primer orden (gradiente y divergencia), las discretizaciones de estos operadores deben verificar una versión discreta del *Teorema de la Divergencia Generalizado* (o Identidad de Green), dada por:

$$\langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathcal{G}^T(\widehat{\mathbf{f}}) \rangle = \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}} \rangle \quad (2.0.1)$$

para un *producto interno generalizado*, definido como sigue:

$$\langle u, v \rangle_Q = v^T Q u \quad (2.0.2)$$

donde $Q \in M^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Existen algunos términos matemáticos que ameritan ser precisados. En las líneas que siguen serán dados éstos y otras definiciones que son fundamentales en el desarrollo subsiguiente del presente trabajo.

Mallados

Sin pérdida de generalidad, en una dimensión, se puede considerar el intervalo $[0, 1]$, ya que mediante una transformación lineal, es posible llevar el dominio continuo de la variable x a dicho intervalo. Se define sobre este intervalo una partición con $N + 1$ puntos, a los que se les denominarán nodos: $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N + 1\}$, donde:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

Estos $N + 1$ nodos, a su vez particionan el intervalo $[0, 1]$ en N celdas, tales que: $\{(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N - 1, N\}$. En la figura 2.1 se muestra un mallado con la ubicación de sus nodos y celdas.

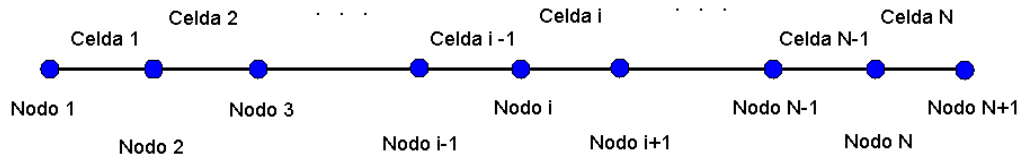


Figura 2.1: Partes de un mallado

Si las celdas del mallado difieren en tamaño una respecto de la otra, se dice que el mallado es *no-uniforme*; pero si por el contrario, todas las celdas poseen el mismo tamaño, este se denomina *mallado uniforme*. En este último caso existe un parámetro h , definido como $h = \frac{1}{N}$, tal que cada nodo puede obtenerse como sigue:

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N + 1$$

La densidad de la distribución de los nodos queda caracterizada por el parámetro h definido anteriormente. En la medida que N crece ($N \rightarrow \infty$), entonces h decrece ($h \rightarrow 0$).

Para el caso no uniforme, se asume la existencia de constantes $C_{m\acute{a}x}$ y $C_{m\acute{i}n}$ independientes de h , tales que:

$$hC_{m\acute{i}n} < x_{i+1} - x_i < hC_{m\acute{a}x} \quad (2.1.1)$$

La suposición anterior es denominada *regularidad*. Por lo tanto, si un mallado *no-uniforme* es regular, está caracterizado por el parámetro h y las dos constantes antes mencionadas.

Mallados Suaves y Mallados No-Suaves

Los mallados *no-uniformes* pueden ser clasificados en *suaves* y *no-suaves*.

Para comprender el significado del mallado suave, considérese la función suave $x = x(t)$ definida del segmento $[0, 1]$ en sí mismo. Esta transformación debe ser inyectiva y en el caso unidimensional es suficiente que la función x sea monótona creciente.

Supongamos que sobre el intervalo $[0, 1]$ se hace una partición uniforme con nodos dados por $t_i = \frac{i-1}{N} \quad : i = 1, 2, \dots, N+1$.

Bajo estas condiciones, el mallado $\{x_i : i = 1, 2, \dots, N+1\}$ sobre el intervalo $[0, 1]$, se denomina *mallado suave* sí y sólo sí las coordenadas en cada nodo son dadas por la función:

$$x = x(t),$$

donde la función $x(t)$ es una función suave o lisa.

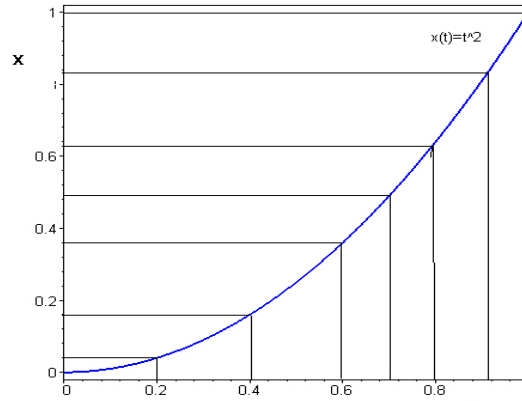


Figura 2.2: Mallado No-uniforme Suave

Es claro ahora que para obtener un mallado *no-uniforme suave* (ver figura 2.2) es necesario, en primer lugar, definir un mallado uniforme (determinado por la variable t , denominado espacio lógico) y una función suave $x(t)$ que se evalúa sobre esta variable.

Otro grupo de mallados *no-uniformes* son los mallados *no-suaves*. Son aquellos que no pueden obtenerse mediante una transformación suave. Por ejemplo (ver figura 2.3), al considerar el mallado *no-uniforme* donde la longitud entre cada par de nodos varía alternativamente $2h, h, 2h, \dots$. Para estos mallados se asume que se cumple la condición de regularidad.

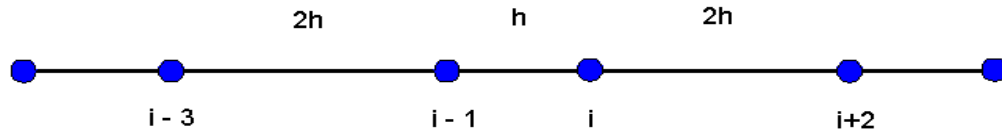


Figura 2.3: Mallado No-uniforme No Suave

Mallado Intercalado

Un mallado intercalado *no-uniforme* consiste en dos conjuntos de puntos (ver figura 2.4). Uno de estos conjuntos es identificado con números enteros, x_i con

$i = 1, \dots, N + 1$, los cuales muestran los puntos que representan a los nodos, y el otro identificado con subíndices racionales de denominador dos, $x_{i+\frac{1}{2}}$ con $i = 1, \dots, N$, estos muestran los puntos medios (representantes de las celdas). De tal forma que si N es un entero positivo, entonces un *mallado intercalado* de tamaño N en el intervalo $[a, b]$, posee $(N + 1)$ puntos x_i , donde $i = 1, 2, \dots, N + 1$, con $x_1 = a$ y $x_{N+1} = b$. El otro conjunto consta de N puntos $x_{i+\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Los puntos deben satisfacer la desigualdad $x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, N$.

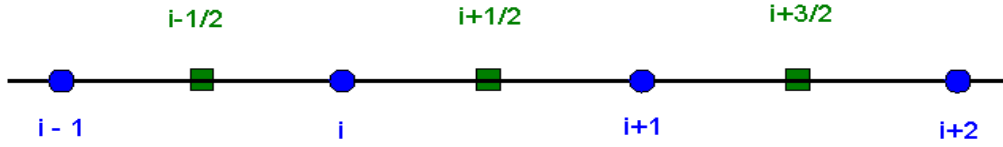


Figura 2.4: Mallado Intercalado

Veamos que para que el error de truncamiento sea de orden 2 en las celdas del *mallado intercalado* se debe tomar como representante de la celda (x_i, x_{i+1}) , el punto $x_{i+\frac{1}{2}}$.

Si llamamos ε_1 a este error, el mismo quedaría expresado como sigue:

$$\varepsilon_1 = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x^*} - \left(\mathcal{D}_x(\mathbf{v}) \right)_i = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x^*} - \frac{\mathbf{v}(x_{i+1}) - \mathbf{v}(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.1.2)$$

Es claro que el valor que toma ε_1 depende del punto x^* que se haya escogido. Para estudiar el error de truncamiento, en el caso más simple, vamos a suponer que $x_i \leq x^* \leq x_{i+1}$, y haremos la expansión en serie de Taylor de $v(x_{i+1})$ y $v(x_i)$ alrededor de x^* . Estas expansiones hasta la segunda derivada quedan como sigue:

$$v(x_{i+1}) = v(x^*) + \frac{d(v(x^*))}{dx}(x_{i+1} - x^*) + \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \frac{(x_{i+1} - x^*)^2}{2} + O(x_{i+1} - x^*)^3 \quad (2.1.3)$$

$$v(x_i) = v(x^*) + \frac{d(v(x^*))}{dx}(x_i - x^*) + \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \frac{(x_i - x^*)^2}{2} + O(x_i - x^*)^3 \quad (2.1.4)$$

Al sustituir (2.1.3) y (2.1.4) en (2.1.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\left(v(x^*) + \frac{d(v(x^*))}{dx} (x_{i+1} - x^*) + \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \frac{(x_{i+1} - x^*)^2}{2} + O(x_{i+1} - x^*)^3 \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(v(x^*) + \frac{d(v(x^*))}{dx} (x_i - x^*) + \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \frac{(x_i - x^*)^2}{2} + O(x_i - x^*)^3 \right) \right] \Big/ [x_{i+1} - x_i] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x^*)^2 - (x_i - x^*)^2}{2(x_{i+1} - x_i)} \right) + \frac{d(v(x^*))}{dx} \left(\frac{(x_{i+1} - x^*) - (x_i - x^*)}{(x_{i+1} - x_i)} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{v(x^*) - v(x^*)}{(x_{i+1} - x_i)} + \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{(x_{i+1} - x_i)} \right] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}x^* + x^{*2} - x_i^2 + 2x_ix^* - x^{*2}}{2(x_{i+1} - x_i)} \right) + \frac{d(v(x^*))}{dx} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{(x_{i+1} - x_i)} \right] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1}^2 - x_i^2) - 2x^*(x_{i+1} - x_i)}{2(x_{i+1} - x_i)} \right) + \frac{d(v(x^*))}{dx} + \right. \\
&\quad \left. \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{(x_{i+1} - x_i)} \right] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) - 2x^*(x_{i+1} - x_i)}{2(x_{i+1} - x_i)} \right) + \frac{d(v(x^*))}{dx} + \right. \\
&\quad \left. \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{(x_{i+1} - x_i)} \right] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \left[\frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} + x_i) - 2x^*}{2} \right) + \frac{d(v(x^*))}{dx} + \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{x_{i+1} - x_i} \right] \\
&= \frac{dv}{dx} \Big|_{x^*} - \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x^*) + (x_i - x^*)}{2} \right) - \frac{d(v(x^*))}{dx} - \left(\frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{(x_{i+1} - x_i)} \right)
\end{aligned}$$

Haciendo luego $\varepsilon = -\varepsilon_1$, entonces

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 = \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x^*) + (x_i - x^*)}{2} \right) + \frac{O(x_{i+1} - x^*)^3 - O(x_i - x^*)^3}{x_{i+1} - x_i}$$

Suponiendo regularidad, la última igualdad puede ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{d^2(v(x^*))}{dx^2} \left(\frac{(x_{i+1} - x^*) + (x_i - x^*)}{2} \right) + O(h^2) \quad (2.1.5)$$

Para este caso el error de truncamiento es de orden h , es decir, $\varepsilon = O(h)$. Esto quiere decir que para un x^* cualquiera el error de truncamiento es de primer orden con respecto a h .

Por otra parte, también se puede observar que el primer término de la igualdad (2.1.5) se anula siempre y cuando:

$$x^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

Luego, si se toma a x^* de esta manera, el error de truncamiento será $\varepsilon = O(h^2)$, para un mallado *no-uniforme* cualquiera.

Mallado Producto Tensorial

Es considerado el mallado bidimensional más sencillo. Se construye tomando en cuenta que, el dominio de las variables x e y es el rectángulo:

$$R = \{0 \leq x \leq a\} \times \{0 \leq y \leq b\}$$

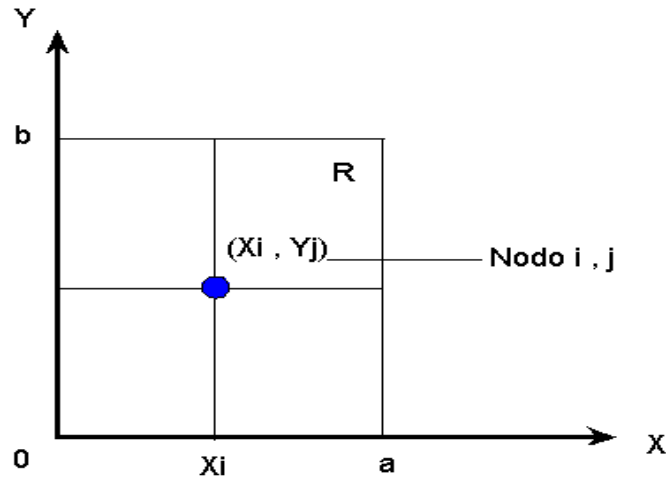


Figura 2.5: Ubicación de un Nodo

Sobre los intervalos $\{0 \leq x \leq a\}$ y $\{0 \leq y \leq b\}$ se pueden construir mallados en 1D como los descritos.

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_N < x_{N+1} = a,$$

$$0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{j-1} < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_M < y_{M+1} = b$$

El conjunto de nodos con coordenadas (x_i, y_j) sobre el plano es llamado *mallado producto tensorial* o *mallado rectangular no-uniforme*. Dicho mallado se forma por puntos, interceptando las líneas $x = x_i$ e $y = y_j$.

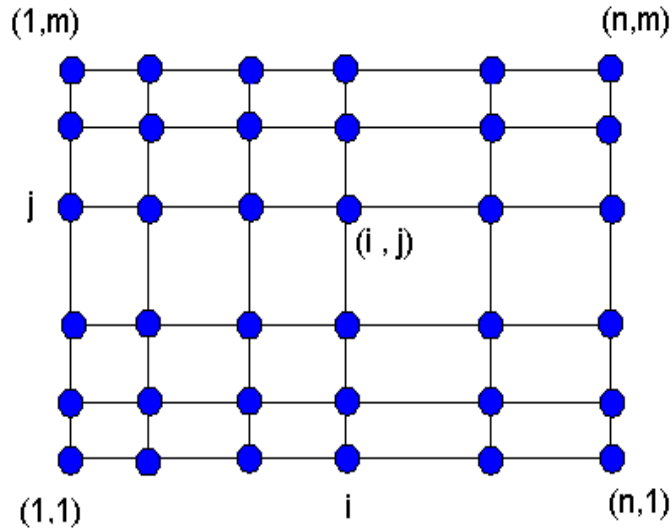


Figura 2.6: Mallado Producto Tensorial

Para *mallados producto tensorial*, la densidad de la distribución de nodos puede ser caracterizada, para mallados uniformes, por el parámetro:

$$h = \max(h_x, h_y) = \max\left(\frac{a}{N}, \frac{b}{M}\right),$$

el cual se aproxima a cero ($h \rightarrow 0$) a medida que el número de nodos se incrementa. El mallado se dice uniforme en alguna dirección (x, y o ambas) si la malla en 1D en esa dirección es uniforme. Si éste es uniforme en ambas direcciones y los pasos h_x y h_y son iguales, entonces el mallado es llamado *mallado cuadrado uniforme*.

Funciones Discretas

Dado un mallado intercalado, se pueden definir sobre el mismo dos tipos de funciones para argumentos discretos. En un primer caso, los valores de la función corresponden

a los nodos (ver figura 2.7). Esta es denominada *discretización nodal*. En este caso la función de malla es un vector de $N + 1$ componentes:

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_i; i = 1, 2, \dots, N + 1\}$$

Si se denomina como $\mathbb{HN}$ el conjunto de todas las funciones de malla de discretización nodal, entonces se puede afirmar que $\mathbf{v} \in \mathbb{HN}$.

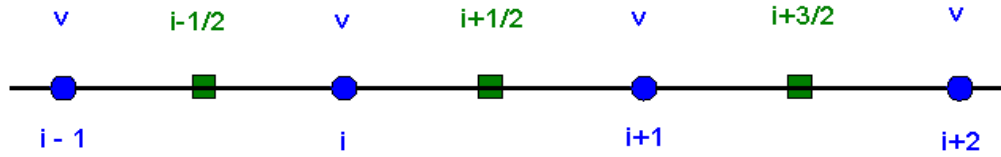


Figura 2.7: Función Nodal

Por otra parte, si los valores de la función discreta o de malla son obtenidos sobre algún punto de la celda (ver figura 2.8), entonces esta es una *discretización celda-valuada*. Sin embargo, para este caso el valor de la función no corresponde a un punto específico de la celda (ver [16]), sino que se considera la celda como un todo geométrico. Para denotar las funciones de malla *celda-valuada*, se usarán los puntos medios. Esto es, si la función se denomina $\mathbf{f}$, entonces al ser evaluada en la celda $[i, i + 1]$, se denotará por $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}(x_{i+\frac{1}{2}})$.

Análogamente, se llama $\mathbb{HC}$ el conjunto de todas las funciones de malla celda-valuada, entonces se puede afirmar que $\mathbf{f} \in \mathbb{HC}$.

De no requerirse discriminar entre ambos tipos de funciones de malla, entonces puede escribirse que $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ ó $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$. Aquí $\mathbb{H}$ representa el conjunto de todas las funciones discretas.

Estas notaciones utilizadas para identificar los tipos de funciones discretas, obedecen a que en dimensiones superiores, las primeras corresponden a una discretización de campos vectoriales y las segundas a una discretización de campos escalares.

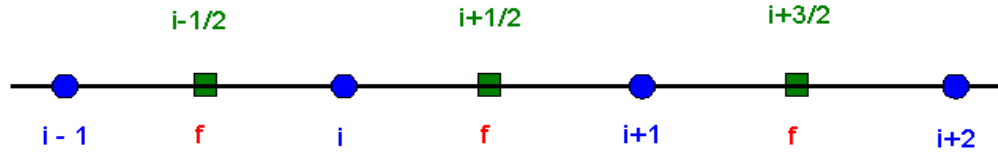


Figura 2.8: Función Celda-Valuada

Matriz en Banda

Se dice que una matriz $A \in M^{n \times n}$ es de tipo en banda si sus elementos no nulos se localizan en una banda, con eje central en la diagonal principal (ver figura 2.9).

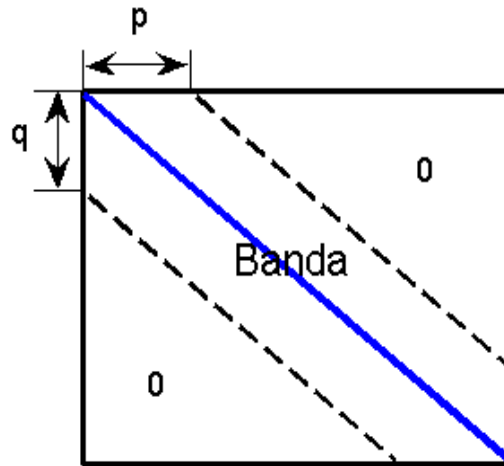


Figura 2.9: Matriz en Banda

Es decir, si existen los enteros p y q tales que $1 < p, q < n$ con la propiedad de que $a_{ij} = 0$, siempre que $j \geq i + p \vee i \geq j + q$. El ancho de banda de una matriz, se define como $w = p + q - 1$. Se dice que una matriz A tiene un ancho de banda m sí $a_{ij} = 0$ para $|i - j| \leq m$.

Matriz con Estructura tipo Toeplitz

Una matriz A tiene estructura tipo *Toeplitz* si sus entradas no nulas en la fila $i + 1$, son justo las entradas no nulas de la fila i desplazada un espacio hacia la derecha. Por

ejemplo, si A es una matriz Toeplitz de dimensión 4×5 cuya primera fila viene dada por los elementos $a_{11} = x_1, a_{12} = x_2, a_{13} = x_3, a_{14} = x_4, a_{15} = x_5$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

Matriz Centrosimétrica

La matriz $A \in M^{m \times n}$ ($M = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es centrosimétrica sí y sólo sí existen matrices de permutación P_m y P_n tal que $A = P_m A P_n$. Por ejemplo, si A es una matriz centrosimétrica de dimensión 4×4 con elemento genérico a_{ij} ($1 \leq i, j \leq 4$), entonces A se verá como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

Matriz Anticentrosimétrica

La matriz $A \in M^{m \times n}$ ($M = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es anticentrosimétrica si y solo si existen matrices de permutación P_m y P_n tal que $A = -P_m A P_n$ (ver [18]). Para construir un ejemplo, usaremos una matriz A análoga a la utilizada en la definición anterior. Para este caso se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{24} & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\ -a_{14} & -a_{13} & -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

2.2. Método de Montilla-Cadenas-Castillo

El método de *Montilla-Cadenas-Castillo* es una generalización de la metodología de *Castillo-Grone* que permite obtener aproximaciones discretas de los operadores (con igual orden de aproximación tanto en el interior del mallado como en su frontera) *divergencia y gradiente* fundamentado en la formulación matricial, para un orden k cualquiera sobre *mallados unidimensionales intercalados uniformes y no-uniformes*. En éste se determina que forma deben tener las matrices de *Vandermonde* presentes en la metodología de *Castillo-Grone* para la obtención de los operadores, a partir de una cierta familia de funciones.

2.2.1. Esquema de Discretización Mimética

Requerimos construir operadores discretos miméticos. Para ello es fundamental satisfacer la identidad integral (2.2.1):

Para un volumen arbitrario V :

$$\int_V f \operatorname{div}(\vec{v}) dV + \int_V \langle \vec{v}, \operatorname{grad}(f) \rangle dV = \oint_{\partial V} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dS \quad (2.2.1)$$

Los dos operadores involucrados, poseen tres ideas estrechamente relacionadas; el *Teorema de la Divergencia*, la *conservación local* y la *conservación global*. La conservación local es un caso especial del Teorema de la Divergencia, tomando a $f \equiv 1$ y a V se selecciona como una celda sencilla. En cambio, la conservación global es (2.2.1) con $f \equiv 1$ aplicada a toda la región en consideración.

En una dimensión y específicamente tomando a V como el intervalo $[0, 1]$, la identidad (2.2.1) se convierte en la regla de integración por partes:

$$\int_0^1 f \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 \frac{df}{dx} v dx = v(1)f(1) - v(0)f(0) \quad (2.2.2)$$

Es decir, que la fórmula de integración por partes se satisfaga en (2.2.2) para $f \equiv 1$ o lo que es lo mismo, para el caso unidimensional, la ecuación (2.2.2) se convierta en:

$$\int_0^1 v' dx = \int_0^1 \frac{dv}{dx} = v(1) - v(0), \quad \text{si } f \equiv 1 \quad (2.2.3)$$

Sea un *mallado intercalado uniforme*, con $h = \frac{1}{N}$, nodos $x_i = (i-1)h$, $1 \leq i \leq N+1$ y celdas (x_i, x_{i+1}) con centros en $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. Considere las funciones discretas $\mathbf{f}$ y $\mathbf{v}$, como en el apartado (2.1). Supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbb{H}\mathbb{C}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{H}\mathbb{N}$. Es decir, $\mathbf{f}$ tiene una discretización celda-valuada (puntos medios) y $\mathbf{v}$ tiene una discretización nodal (puntos enteros).

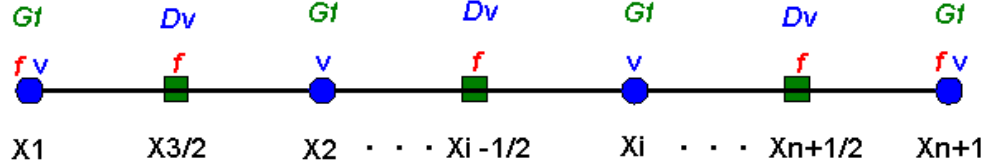


Figura 2.10: Operadores Discretos

El operador de divergencia discreto ($\mathcal{D}$) actuará sobre los valores de $\mathbf{v}$, mientras que el gradiente discreto ($\mathcal{G}$) lo hará sobre los valores de $\mathbf{f}$ (ver figura 2.10)

Con estas condiciones, sabemos que el operador divergencia discreto más simple está dado por:

$$\left(\mathcal{D}_x(\mathbf{v})\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i}{h}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.2.4)$$

y el gradiente discreto es definido a su vez por:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{G}_x(\mathbf{f})\right)_1 &= \frac{\mathbf{f}_{\frac{3}{2}} - \mathbf{f}_1}{0,5h}, & i = 1 \\ \left(\mathcal{G}_x(\mathbf{f})\right)_i &= \frac{\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}}{h}, & 2 \leq i \leq N \\ \left(\mathcal{G}_x(\mathbf{f})\right)_{N+1} &= \frac{\mathbf{f}_{N+1} - \mathbf{f}_{N+\frac{1}{2}}}{0,5h}, & i = N + 1 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Esta divergencia $\mathcal{D}$ tiene una exactitud de orden dos, mientras que el gradiente es de segundo orden en el interior y primer orden en la frontera. Por lo tanto, se deben establecer las condiciones necesarias para que la aproximación tenga orden dos en todo punto del mallado.

Cuando se usa el mallado intercalado uniforme, la función $\mathbf{v}$ se transforma en una $(N + 1)$ -upla y el operador divergencia $\mathcal{D}$ se puede interpretar como una matriz de N filas y $(N + 1)$ columnas.

La divergencia de los campos vectoriales constantes es nula. Por ejemplo, si $\mathbf{v}$ es una función nodal, tal que, $\mathbf{v} \equiv 1$, entonces $\mathcal{D}\mathbf{v} = 0$. Es decir, si $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ es una $(N + 1)$ -upla, entonces al premultiplicarla con $\mathcal{D}$ se debe cumplir:

$$\mathcal{D}\mathbf{e} = 0 \quad (2.2.6)$$

Esta condición puede ser expresada diciendo, que al sumarse los elementos de las filas de $\mathcal{D}$ debe dar cero. Que equivale a la propiedad de la derivada de anular las funciones constantes.

Para la siguiente restricción mimética es conveniente expresar la ley de conservación global en términos de productos internos.

Si $\mathbf{f} \equiv 1$, la ecuación (2.2.3) es equivalente a:

$$\langle \text{div}(v), 1 \rangle = v(1) - v(0)$$

Su análogo discreto es:
$$\langle \mathcal{D}(\mathbf{v}), \mathbf{e} \rangle = \mathbf{v}_{N+1} - \mathbf{v}_1 \quad (2.2.7)$$

Aquí $\mathbf{e}$ es una $(N + 1)$ -upla de unos. Esta condición puede ser expresada mediante la afirmación de que $\mathcal{D}$ tiene suma de columnas igual a $-1, 0, \dots, 0, 1$.

Además la ecuación (2.2.7) también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\mathbf{e}^T \mathcal{D} = \left(-1, 0, \dots, 0, 1 \right) \quad (2.2.8)$$

Las restricciones miméticas: (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8), no son las únicas condiciones que esperamos que satisfaga $\mathcal{D}$. Existen otras condiciones naturales que $\mathcal{D}$ debe poseer, determinadas por la geometría de la situación. Por otra parte, el requerimiento de que $\mathcal{D}$ sea una aproximación de orden superior da más condiciones. Debería esperarse que nuestra matriz de divergencia sea *esparcida*, a fin de que estos métodos sean de interés. Puesto que los valores de aproximación en cualquier nodo deberían ser determinados por sus vecinos más cercanos, esto conduce a que $\mathcal{D}$ deba ser una *matriz en banda*. El esquema de discretización de los nodos interiores puede esperarse que sean similares. Por tanto, las filas interiores deberían tener una *estructura tipo Toeplitz*, donde las entradas no nulas en la fila $i+1$, son justo las entradas no nulas de la fila i desplazada un espacio hacia la derecha. Las propiedades de banda y tipo Toeplitz, juegan un papel determinante en el presente esquema de discretización.

Si el ancho de banda de $\mathcal{D}$ es b , la técnica permite que $\mathcal{D}$ sea descrita independiente de N , siempre y cuando, $N \geq 3b - 1$. Otra propiedad estructural de $\mathcal{D}$ es motivada de acuerdo a lo que sigue.

Supongamos una función w definida por $w(x) = v(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$, entonces la divergencia de w es el negativo de la divergencia de v .

Esto también puede ser escrito así:

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dv(1-x)}{dx}$$

En términos algebraicos esto impone la siguiente condición de simetría sobre $\mathcal{D}$. Sea P_N la matriz de permutación de orden N :

$$P_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{D}$ es $N \times (N + 1)$ entonces la versión mimética discreta de $\text{div}(w) = -\text{div}(v)$ es:

$$\mathcal{D} = -P_N \mathcal{D} P_{N+1} \quad (2.2.9)$$

Es decir, $\mathcal{D}$ es una matriz matriz anticentrosimétrica.

A continuación se hace un resumen de las propiedades deseadas de la matriz de divergencia $\mathcal{D}$:

1. $\mathcal{D}$ tiene suma de filas cero, o de forma equivalente $\langle \mathbf{e}, \mathcal{D}^T \rangle = \mathcal{D} \mathbf{e} = 0$, donde $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$.
2. $\mathcal{D}$ tiene suma de columnas $-1, 0, \dots, 0, 1$, o de forma equivalente $\langle \mathcal{D}, \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}^T \mathcal{D} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.
3. $\mathcal{D}$ es una matriz en banda (b denota el ancho de banda de $\mathcal{D}$).
4. $\mathcal{D}$ tiene una estructura tipo Toeplitz en la filas interiores, y es definida independiente de N (el número de puntos del mallado), si $N \geq 3b - 1$.
5. $\mathcal{D}$ es anticentrosimétrica: $\mathcal{D} = -P_N \mathcal{D} P_{N+1}$

Conocidas las condiciones que se le deben imponer a $\mathcal{D}$, vamos a tratar de obtener estas matrices. En el caso de que se esté usando el producto interno usual, el problema de encontrar una versión discreta mimética del gradiente es equivalente a encontrar una versión discreta de la divergencia.

Sea $\mathcal{D}$ una matriz $N \times (N + 1)$, versión discreta de la divergencia, $\widehat{\mathcal{D}}$ la matriz aumentada $\mathcal{D}$ en dos filas de ceros, la primera y la última. Además, sea $\mathcal{G}$ una matriz $(N + 1) \times (N + 2)$, versión discreta del gradiente. Si $\mathbf{v}$ es una $(N + 1)$ -upla, $\mathbf{f}$ es una N -upla, es decir, $(\mathbf{f}_{\frac{3}{2}}, \mathbf{f}_{\frac{5}{2}}, \dots, \mathbf{f}_{N+\frac{1}{2}})$ y $\widehat{\mathbf{f}}$ es $\mathbf{f}$ aumentada con los puntos $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_{N+1}$ agregados en sus extremos, tal que, $\widehat{\mathbf{f}}$ es una $(N + 2)$ -upla. Para estos objetos, la identidad integral (2.2.2) en términos del producto interno usual, da la siguiente versión discreta:

$$\langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathcal{G}(\widehat{\mathbf{f}}) \rangle = \mathbf{v}_N \mathbf{f}_N - \mathbf{v}_1 \mathbf{f}_1 \quad (2.2.10)$$

O de forma equivalente:

$$\langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle + \langle \mathcal{G}^T(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle = \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}} \rangle \quad (2.2.11)$$

Donde $\mathbf{B}$ es una matriz $(N + 2) \times (N + 1)$, que asume los requerimientos de verificación del teorema de la divergencia discreta, a tal efecto $\mathbf{B}$ toma la forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

Esto, de hecho implica, que $\widehat{\mathcal{D}} + \mathcal{G}^T = \mathbf{B}$, lo que a su vez hace que $\mathcal{G}$ deba tener la forma:

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & -\mathcal{D}^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Exceptuando el comportamiento en la frontera, $\mathcal{G}$ es el adjunto negativo de $\mathcal{D}$. Mediante el uso de las identidades (2.2.2) y (2.2.10), se ha podido establecer como los análogos discretos, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{D}$, de los operadores continuos, están relacionados.

2.2.2. Productos Internos Generalizados

En el apartado anterior se describió el problema en términos de fórmulas para productos internos euclídeos $\langle u, v \rangle = v^T u$. Se demostrará más adelante que no es posible satisfacer todas las propiedades deseadas, al agregar las condiciones de orden superior. Sin embargo, si se define un producto interno generalizado o pesado, es posible tener éxito en las soluciones. La forma más general de un producto interno sobre N -uplas es:

$$\langle u, v \rangle_Q = \langle Qu, v \rangle = v^T Qu, \quad (2.2.14)$$

Donde Q es una matriz cuadrada de orden N definida positiva.

También, (2.2.14) puede ser expresado por:

$$\langle u, v \rangle = \langle Eu, Ev \rangle = v^T E^T Eu = (Ev)^T Eu$$

Donde E es una matriz de rango N que satisface $E^T E = Q$. Estos productos internos definidos por E o por Q , se les denominará, *producto interno generalizado*. Si la matriz Q (o E) es diagonal, al producto interno correspondiente se le llama *producto interno pesado*.

Mediante el uso del producto interno generalizado, las ecuaciones (2.2.7) y (2.2.8), se convierten respectivamente en:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathbf{v}, \mathbf{e} \rangle_Q &= v_N - v_1 \\ \mathbf{e}^T Q \mathcal{D}\mathbf{v} &= (-1, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

2.2.3. Técnica Matricial para Operadores Discretos Miméticos

Sea $\mathcal{D}$ una matriz $N \times (N+1)$ que representa una divergencia discreta. Se afirma que $\mathcal{D}$ es una *aproximación de orden k* si $\mathcal{D}$ es exacta para polinomios de grado menor o igual a k , pero no para polinomios de grado superior a k .

Para obtener aproximaciones de orden k , existe una *matriz generadora* natural, que llamaremos $\mathbf{S}$. Por ejemplo, si $k = 4$, entonces el ancho de banda de $\mathbf{S}$, es también igual a 4, y las filas interiores de $\mathbf{S}$ tienen la forma:

$$\frac{1}{24}[0, 0, \dots, 0, 1, -27, 27, -1, 0, \dots, 0, 0] \quad (2.2.16)$$

La *fórmula generadora* se obtiene utilizando los polinomios de aproximación de Lagrange (ver *Apéndice D*).

Para ilustrar lo dicho anteriormente, supongamos que $N = 7$ y $k = 4$. Usando el modelo dado por (2.2.16) e imponiendo las condiciones de suma de columnas y de filas sobre $\mathbf{S}$, se obtiene inmediatamente la *matriz generadora*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{25}{24} & \frac{13}{12} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{13}{12} & \frac{25}{24} \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

Esta matriz tiene las propiedades exigidas en la sección 2.2.1: Las condiciones de suma de filas y de columnas. Es una matriz en banda con ancho de banda $b = 4$ y es anticentrosimétrica. La matriz puede ser descrita independiente de N para $N \geq 5$ y satisface las condiciones de aproximación en el interior, pero no en la frontera.

Por lo tanto, el problema radica en modificar $\mathbf{S}$, de tal forma que también posea aproximación de cuarto orden en la frontera. La técnica es general, en el sentido de que se aplica a cualquier orden de aproximación.

En vista de lo anterior, se puede afirmar que para cualquier k , existe una matriz canónica $\mathbf{S}$ con las siguientes propiedades:

- i) $\mathbf{S}$ tiene dimensión $N \times (N + 1)$.
- ii) El ancho de banda de $\mathbf{S}$ es k .
- iii) $\mathbf{S}$ tiene orden de aproximación k en los puntos interiores del intervalo, pero de orden inferior en los extremos (frontera).
- iv) $\mathbf{S}$ satisface la condiciones de suma de filas, columnas y es anticentrosimétrica.

En consecuencia, $\mathbf{S}$ es candidata a convertirse en la matriz de divergencia mimética $\mathcal{D}$. Para ello habrá que modificar $\mathbf{S}$ y obtener una aproximación uniforme de orden k . Luego, a la matriz $\mathbf{S}$ modificada se le denominará $\mathcal{D}$.

Por lo visto, la modificación que debe sufrir $\mathbf{S}$, debe estar centrada en las filas extremas, que son las que están vinculadas con los nodos frontera (extremos y sus vecinos). Sea entonces k las primeras y últimas filas a modificar de $\mathbf{S}$ para poder obtener a $\mathcal{D}$.

Para que la técnica sea en general útil, se requiere que k sea una función sólo de b y no de N . Para ello es suficiente hacer $k = b$. Por otra parte, como $\mathbf{S}$ es anticentrosimétrica, sólo se amerita hacer el estudio en sus primeras filas.

Criterio: Sean k y $\frac{3k}{2}$ enteros no negativos fijos y A la matriz de dimensión $k \times \frac{3k}{2}$. La matriz modificada $\mathbf{S}$ se obtendrá al reemplazar las primeras k filas de $\mathbf{S}$ por una matriz de dimensión $k \times (N + 1)$.

Las últimas filas de $\mathbf{S}$ quedarán modificadas por la matriz A' , donde:

$$A' = -P_k A P_{\frac{3k}{2}} \quad (2.2.18)$$

El bloque matricial sustitutivo, quedará como sigue:

$$[A \quad 0]$$

La nueva matriz obtenida se le denominará $\mathcal{D}(A)$.

En lo que respecta al número de columnas de A , se espera que sea pequeño comparado con b e independiente de N . Para aplicar la metodología es suficiente exigir que A tenga orden $k \times \frac{3}{2}k$. Como ya se sabe, k es tanto el orden de aproximación como el ancho de banda de $\mathbf{S}$ en sus filas interiores, cuando k es un entero no negativo par.

Desde aquí en adelante se considerará a k un número par.

Se asumirá que $b = k$ y $N \geq 3k - 1$. Esto es para asegurar que las porciones, superior izquierda e inferior derecha, modificadas de $\mathbf{S}$ no tengan columnas en común (solapamiento), esto daría dificultades para cumplir con la condición de suma de columnas.

Quizás la manera más sencilla para realizar dicha modificación es premultiplicar a $\mathbf{S}$ por una matriz de la forma:

$$Q = \Lambda \otimes I_{N-2k} \otimes \Lambda' \quad (2.2.19)$$

Donde Λ es una matriz $k \times k$ definida positiva y $\Lambda' = P_k \Lambda P_k$ con la finalidad de preservar la propiedad de anticentrosimetría de $\mathbf{S}$. Obsérvese que de acuerdo con su construcción Q es una matriz centrosimétrica.

Vamos a ilustrar (2.2.19) con un ejemplo. Supongamos que $N = 6$ y $k = 2$, para estos valores y considerando a la matriz Λ diagonal, Q es:

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

Esto puede ser visto como el uso de un caso particular del producto interno generalizado. Un caso especial sería tomar a Λ como una matriz diagonal definida positiva. Se afirma, que si el producto interno es el usual, esta situación lamentablemente no puede ocurrir.

Proposición 2.2.1. *No existe matriz de divergencia mimética de orden k para $k \geq 2$, cuando Q es diagonal con respecto al producto interno usual.*

Prueba: Se sabe que la matriz generadora $\mathbf{S}$, de dimensión $N \times (N + 1)$ satisface las condiciones miméticas:

- i) $\mathbf{S} \mathbf{e} = 0$,
- ii) $\text{rango}(\mathbf{S}) = N$, es decir, las N filas de $\mathbf{S}$ son no nulas.
- iii) $\mathbf{S}$ es anticentrosimétrica,
- iv) $\langle \mathbf{S}, \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}^T \mathbf{S} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.

Sea Q una matriz diagonal arbitraria $N \times N$. Es imposible que tanto $\mathbf{S}$ como $Q\mathbf{S}$ satisfagan la condición de cuarto orden a menos que $Q = I_N$. Hemos notado que $\mathbf{S}$ no satisface la condición de orden k en la frontera para $k \geq 2$.

Ahora bien, si:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{S} = \mathbf{e}^T Q \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{e}^T (\mathbf{S} - Q \mathbf{S}) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}^T (I_N - Q) \mathbf{S} = 0$$

Como el $\text{rango}(\mathbf{S}) = N$, entonces, $\mathbf{e}^T (I_N - Q) = 0$. Ahora, como $I_N - Q$ es diagonal, ello obliga a $I_N - Q = 0$ o que $Q = I_N$.

Por la caracterización que se ha hecho sobre las condiciones de orden de $\mathcal{D}$ y/o de $\mathbf{S}$, es obvio que $\mathbf{S}$ no puede tener aproximación de orden superior sobre los puntos extremos para el producto interno usual.

2.2.4. Sistema Lineal $\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r}$

En este apartado se hará una descripción de la metodología a seguir para obtener la matriz $\mathcal{D}(A)$. La clave consiste en determinar las entradas de A . Para ello es conveniente plantear el problema en términos de un sistema de ecuaciones lineales, cuyo vector de incógnitas estará conformado, precisamente, por los elementos de esta última matriz.

Si k es par, será posible encontrar una matriz A de tamaño $k \times \frac{3}{2}k$, tal que, $\mathcal{D}(A)$ satisfaga las relevantes condiciones miméticas y de orden con respecto al producto interno pesado definido por una matriz Q con la forma dada en (2.2.19). Para este caso Λ será una matriz diagonal $k \times k$ y será independiente de N .

Sea $\mathbf{a}$ la $\frac{3}{2}k^2$ – upla formada por las filas de A , es decir:

$$\mathbf{a} = (\text{fila}_1 A, \text{fila}_2 A, \dots, \text{fila}_t A)^T \quad (2.2.21)$$

Los requerimientos que se desean satisfacer son: condición de suma de filas, condición de suma de columnas y la exigencia del orden (hasta orden k).

Por sus propiedades de linealidad, estas condiciones miméticas sobre $\mathcal{D}(A)$, pueden ser expresadas en términos matriciales de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.2.22)$$

Como ya se dijo, las incógnitas provienen de la matriz A (2.2.21), necesaria para conseguir una divergencia mimética de orden k en todas partes, a partir de una matriz generadora $\mathbf{S}$.

Como A es de orden $k \times \frac{3}{2}k$, donde k es un entero no negativo par, que representa el orden de aproximación; entonces, el vector columna $\mathbf{a}$, tendrá $\frac{3}{2}k^2$ entradas, por lo tanto el sistema (2.2.22) posee $\frac{3}{2}k^2$ variables. Por ejemplo, si $k = 4$, habrá 24 incógnitas.

$\mathbf{a}$ se verá como en (2.2.21) o de manera equivalente:

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{\frac{3}{2}k^2})^T \quad (2.2.23)$$

En lo que respecta a las dos otras componentes del sistema: $\mathbf{M}$ y $\mathbf{r}$, serán como sigue.

$\mathbf{M}$ es una matriz en bloques de $k(k+1) + \frac{3}{2}k$ filas y $\frac{3}{2}k^2$ columnas. Este tamaño lo determinan las condiciones de mimeticidad que se deben satisfacer y sus componentes principales son determinadas matrices de Vandermonde.

Sea m un entero positivo y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ una n -upla, la matriz de *Vandermonde* de tamaño $(m+1) \times n$ es:

$$V(m; x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

La matriz $\mathbf{M}$, tendrá exactamente una estructura en función de matrices de Vandermonde como las definidas en (2.2.24), así que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_k \\ I_{\frac{3}{2}k} & I_{\frac{3}{2}k} & \cdots & I_{\frac{3}{2}k} \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

Naturalmente que la matriz $\mathbf{M}$ tiene $\frac{3}{2}k^2$ columnas, puesto que debe coincidir con el número de filas del vector de incógnitas $\mathbf{a}$.

Ahora bien, qué características tendrán nuestras matrices de Vandermonde. Pues bien, como el orden es k , se toma naturalmente $m = k$, luego éstas serán de $k + 1$ filas, es decir, se tomán las $k + 1$ primeras potencias para los x_i , $i = 1, \dots, n$.

La fila “uno” de cada matriz de Vandermonde debe satisfacer la condición de suma de filas para $\mathcal{D}(A)$, es decir, que el operador diferencial se anule cuando sea aplicado a funciones constantes. Como $\mathcal{D}(A)$ es una modificación de $\mathbf{S}$ en las primeras k filas, se necesitan exactamente k matrices de Vandermonde. Luego, si se simboliza cada matriz Vandermonde como V_i , con $i = 1, 2, \dots, k$; cada una de estas matrices satisface la condición de suma de filas, para la fila i de $\mathcal{D}(A)$. Las restantes k filas corresponden al requerimiento del orden.

Esto ayuda a determinar el número de filas de $\mathbf{M}$. Como son k matrices de Vandermonde de $k + 1$ filas cada una, se acumulan $k(k + 1)$ filas para $\mathbf{M}$. Pero aún falta satisfacer la condición de suma de columnas, para ello se agrega un bloque en la parte inferior de $\mathbf{M}$ de k matrices identidad de tamaño $\frac{3}{2}k$ ($I_{\frac{3}{2}k}$), como aparece en (2.2.25).

En consecuencia, como se afirmó, $\mathbf{M}$ tendrá $k(k + 1) + \frac{3}{2}k = \frac{2k^2 + 5k}{2}$ filas y $\frac{3}{2}k^2$ columnas.

Si $p = \frac{2k^2 + 5k}{2}$ y $q = \frac{3}{2}k^2 \Rightarrow \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Falta saber cuántas columnas tienen cada una de las matrices V_i , $i = 1, \dots, k$. Es decir, cuántos puntos se van a utilizar de la discretización. Supongamos que sean n , como $\mathbf{M}$ tiene q columnas, son k matrices y tomando en consideración que se debe evitar el solapamiento, se cumple que:

$$nk = q = \frac{3}{2}k^2 \Rightarrow n = \frac{3}{2}k$$

Como se está asumiendo que k es par entonces n será un entero. Si k fuese impar habría que agregar más puntos de la discretización.

Por lo explicado anteriormente, las matrices de Vandermonde están en el espacio $\mathbb{R}^{(k+1) \times n}$.

Para hallar dichas matrices, en primer lugar debe establecerse que función o funciones son las adecuadas al momento de determinar sus entradas. En razón, a que se requiere conseguir aproximaciones de la derivada, que sean exactas para polinomios de grado igual o menor que k , donde k es el orden del error de truncamiento del operador discreto; es de esperarse que las funciones de prueba que se necesitan, respondan a una estructura polinomial.

2.2.5. Funciones de Prueba para la Divergencia

La clave consiste en escoger una función de prueba v adecuada. Supondremos que la función se discretiza en los nodos (función nodal), ello conducirá al operador discreto DIVERGENCIA.

Sea A una matriz 2×3 , cada fila de la matriz A aproxima a la derivada v' de la función continua v en un punto. Es decir, dada una discretización (ver figura 2.11), para $k = 2$ se tendrá la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{3}{2}} \\ (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

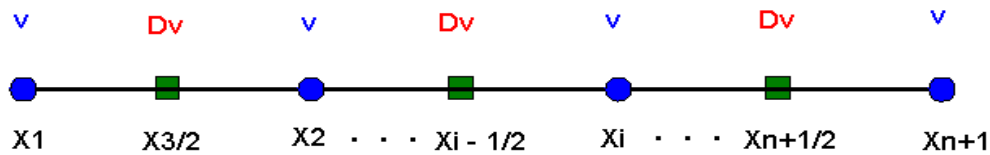


Figura 2.11: Acción de la Divergencia

O más bien:

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{3}{2}} = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + a_{13}\mathbf{v}_3 = \sum_{j=1}^3 a_{1j}\mathbf{v}_j = v'(x_{\frac{3}{2}})$$

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{5}{2}} = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{23}\mathbf{v}_3 = \sum_{j=1}^3 a_{2j}\mathbf{v}_j = v'(x_{\frac{5}{2}})$$

De manera general:

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}\mathbf{v}_j = v'(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad i = 1, 2. \quad (2.2.26)$$

Sea A una matriz de dimensión $k \times \frac{3k}{2}$. En donde, k es el orden de aproximación deseado. La aproximación que hace A para una función derivable v , definida en los nodos del mallado intercalado, se verá como sigue:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{3}{2}} \\ (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{\frac{5}{2}} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ (\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \cdots & a_{(k-1)l} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{l-1} \\ \mathbf{v}_l \end{pmatrix} \quad (2.2.27)$$

Aquí se ha supuesto que $\frac{3k}{2} = l$.

Para hacer la generalización de la expresión (2.2.26) sólo basta cambiar los contadores:

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}\mathbf{v}_j = v'(x_{i+\frac{1}{2}}); \quad i = 1, 2 \dots k. \quad (2.2.28)$$

En virtud, a que el objetivo planteado es hacer aproximaciones de la derivada, para polinomios de grado menor o igual a k , parece natural que la función de prueba sea polinómica. En efecto, se propone como funciones de prueba la familia:

$$v(x) = \left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)^n, \quad \text{donde } n = 0, 1, \dots, k \quad (2.2.29)$$

Se estudiará como se comportan las derivadas de v en (2.2.29) en la medida que n cambia.

Para $n = 0$, $v(x) \equiv 1$, esto implica que $v'(x) = 0$. Como la discretización de v , la función nodal $\mathbf{v}$ se está evaluando en los puntos del mallado intercalado y de acuerdo con (2.2.28):

$$v'\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \mathbf{v}_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

O más bien: $\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k$, puesto que, $\mathbf{v}_j = v(x_j) \equiv 1$, para todo j .

Por lo tanto, como $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i\frac{3k}{2}} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k$, se verifica la condición de suma de filas. Lo que es equivalente a que el operador diferencial discreto se anula sobre las constantes.

Considérese ahora $n = 1$,

Para este caso $v(x) = x - x_{i+\frac{1}{2}}; \quad i = 1, 2, \dots, k$, esto implica que $v'(x) = 1$.

Ahora se sigue un procedimiento análogo al que se usó para $n = 0$.

$$v'\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \mathbf{v}_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(x_j - x_{i+\frac{1}{2}}\right) = 1; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.30)$$

Para $n = 2$, $v(x) = \left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)^2$; $i = 1, 2, \dots, k$, esto implica que:

$$v'(x) = 2 \left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

Al hacer la sustitución como en los casos anteriores:

$$v' \left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = 2 \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}\right) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \mathbf{v}_j = 0$$

$$\text{Luego: } \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(x_j - x_{i+\frac{1}{2}}\right)^2 = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.31)$$

Si se hace este cálculo para un $n \geq 2$, se llega a que:

$$(\mathcal{D}(\mathbf{v}))_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(x_j - x_{i+\frac{1}{2}}\right)^n = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.32)$$

Ahora bien, si se usa la delta de Kronecker, los resultados anteriores se pueden expresar a través de la ecuación:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(x_j - x_{i+\frac{1}{2}}\right)^n = \delta_{1n}; \quad 1, 2, \dots, k \text{ y } n = 0, 1, 2, \dots, k \quad (2.2.33)$$

$$\text{Donde } \delta_{1n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

El resultado dado en (2.2.33) es válido para mallados intercalados no-uniformes. Veamos que ocurre si en cambio el mallado es uniforme.

A tal efecto:

$$x_i = ih \quad y \quad x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{ih + (i+1)h}{2} = \frac{(2i+1)h}{2}$$

Consideremos en primer lugar $n = 1$, puesto que para $n = 0$ es obvio. Sustituyendo en (2.2.33):

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(jh - \frac{(2i+1)h}{2} \right) = 1; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad y \quad n = 0, 1, 2, \dots, k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(\frac{2j - 2i - 1}{2} \right) h = 1;$$

Si la expresión anterior se multiplica por $-\frac{2}{h}$:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j) = -\frac{2}{h}; \quad i = 1, 2 \dots k \quad (2.2.34)$$

Tomemos ahora $n = 2$. Al hacer la sutitución en (2.2.33) y tomando en consideración que:

$\mathbf{v}_j = \left(x_j - x_{i+\frac{1}{2}} \right)^2$; $i = 1, 2 \dots k$, para cualquier nodo j , en el mallado uniforme se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j)^2 = 0; \quad i = 1, 2 \dots k \quad (2.2.35)$$

Se observa que el miembro izquierdo de la anterior ecuación es idéntico a (2.2.34).

Finalmente, siguiendo un cálculo análogo al anterior, se cumple que si $n \neq 1$:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j)^n = 0; \quad i = 1, 2 \dots k \quad (2.2.36)$$

Al igual como se hizo con los mallados no-uniformes, se puede dar una forma general para estos resultados. En efecto, para un n cualquiera:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(\frac{2j - 2i - 1}{2^n} \right)^n h^n &= \delta_{1n} \\ \Downarrow \\ \sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j) &= -\frac{2^n}{h^n} \delta_{1n} \end{aligned}$$

Como $\frac{2^n}{h^n} \delta_{1n} = 0$, para todo $n \neq 1$, se puede escribir:

$$\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j)^n = -\frac{2}{h} \delta_{1n}; \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ y } n = 0, 1, 2, \dots, k \quad (2.2.37)$$

Lo más relevante de todo el trabajo anterior es la expresión $2i + 1 - 2j$ en (2.2.37), que ha venido apareciendo sistemáticamente.

Esta última expresión nos da toda la información que requerimos, respecto a las *matrices de Vandermonde* y al vector $\mathbf{r}$, para el caso en que se requiera determinar el *operador de divergencia discreto*.

Afirmamos que la expresión: $2i + 1 - 2j$, con $i = 1, 2 \dots k$ y $j = 1, 2, \dots, \frac{3}{2}k$, da las entradas para las *matrices de Vandermonde* que conforman a $\mathbf{M}$. En otras palabras la matrices V_i tendrán la estructura que a continuación se escribe:

$$V_i = V(k; 2i - 1, 2i - 3, \dots, 2i + 1 - 3k); \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.38)$$

Cada una de estas matrices tiene $\frac{3k}{2}$ entradas.

Explícitamente las k matrices de Vandermonde son:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(k; 1, -1, -3, \dots, 3 - 3k) \\ V_2 &= V(k; 3, 1, -1, \dots, 5 - 3k) \\ V_3 &= V(k; 5, 3, 1, \dots, 7 - 3k) \\ &\vdots \\ V_k &= V(k; 2k - 1, 2k - 3, \dots, 1 - k) \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

El vector $\mathbf{r}$, que posee los términos independientes del sistema (2.2.22), queda también determinado por (2.2.37).

En efecto, su estructura se dijo que era: $\mathbf{r} = (\mathbf{c} \ \mathbf{c} \ \mathbf{c} \ \dots \ \mathbf{d})^T$, donde el tamaño de $\mathbf{r}$ es $p = k(k + 1) + \frac{3k}{2}$. $\mathbf{c}$ es una $k + 1$ -upla (número de filas de las matrices de Vandermonde) y desde luego habrá k de estos vectores con estructura general según (2.2.37):

$$\mathbf{c} = \left(0, -\frac{2}{h}, 0, \dots, 0 \right)^T \quad (2.2.40)$$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\frac{3k}{2}}$, tal que, satisfaga la condición mimética de suma de columnas: $(-1, 0, 0, \dots, 0, 0)$. Por ser $\mathbf{r}$ el término independiente del sistema (2.2.22) submúltiplo de $1/h$, se multiplica ambos miembros por h , teniendo así el sistema la misma forma que el dado en [1].

Estamos en condiciones de determinar la matriz $\mathbf{M}$ para cualquier k par. Es decir, se puede, salvo la dificultad en hacer los cálculos, obtener el operador de DIVERGENCIA con una exactitud de orden k , tanto en el interior del mallado como en la frontera.

2.2.6. Funciones de Prueba para el Gradiente

Ahora, asumiremos una discretización en la celda (función celda-valuada), si se actúa sobre ésta en un mallado intercalado se obtendrá el operador discreto GRADIENTE. En mallados intercalados, dada una función continua f en $1D$, es posible hallar para f' , la derivada de f , dos operadores diferenciales discretos.

Dado que, las filas de la matriz A aproximan a la derivada f' de una función derivable f , en un punto de la discretización celda-valuada (ver figura 2.12), para $k = 2$ se tendría la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{G}(f))_1 \\ (\mathcal{G}(f))_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{\frac{3}{2}} \\ \mathbf{f}_{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$$

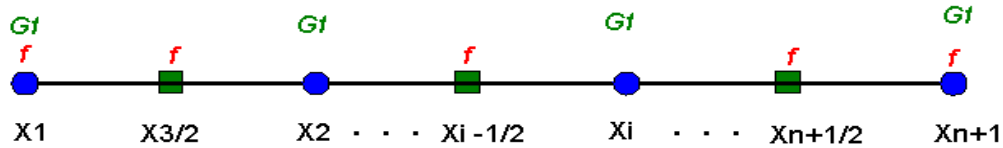


Figura 2.12: Acción del Gradiente

En otras palabras:

$$(\mathcal{G}(f))_1 = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{12}\mathbf{f}_{\frac{3}{2}} + a_{13}\mathbf{f}_{\frac{5}{2}} = a_{11}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^3 a_{1j}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = f'(x_1)$$

$$(\mathcal{G}(f))_2 = a_{21}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_{\frac{3}{2}} + a_{23}\mathbf{f}_{\frac{5}{2}} = a_{21}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^3 a_{2j}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = f'(x_2)$$

En forma más simplificada:

$$(\mathcal{G}(f))_i = a_{i1}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^3 a_{ij}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}}; \quad i = 1, 2. \quad (2.2.41)$$

Un esquema matricial del gradiente, tiene forma análoga al que se presentó en (2.2.27), salvo que el gradiente se está calculando en los puntos enteros (función nodal) y la divergencia se calcula en los puntos medios (función de celda-valuada). Los dominios respectivos son los centro de celda y los nodos del mallado. Sin embargo, para el gradiente (ver figura 2.12) se debe extender $\mathbf{f}$ hacia la frontera. Es decir, se incluye $\mathbf{f}_1$. La frontera derecha en este caso no se considera porque sólo se está estudiando los primeros puntos de la discretización.

Ahora bien, sea A una matriz de tamaño $k \times \frac{3k}{2}$. La generalización de la expresión (2.2.41) se logra mediante el cambio de los contadores:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = a_{i1}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.42)$$

La familia de funciones de prueba que se propone para el gradiente discreto es:

$$f(x) = (x - x_i)^n, \quad \text{donde } n = 0, 1, \dots, k \quad (2.2.43)$$

Al igual como se hizo con la función de prueba de la divergencia, estudiemos la primera derivada de f para los distintos valores de n .

Para $n = 0$, $f(x) \equiv 1$, esto implica que $f'(x) = 0$. Como la discretización de f , $\mathbf{f}$ se está evaluando en las celdas del mallado intercalado y de acuerdo con (2.2.42):

$$f'(x_i) = 0 \Rightarrow a_{i1}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

De manera equivalente: $\sum_{j=1}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} = 0$; $i = 1, 2, \dots, k$, puesto que:

$$\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = f\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) = 1, \quad \text{para todo } j$$

Es decir, como $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i\frac{3k}{2}} = 0$; $i = 1, 2, \dots, k$, se verifica la condición de suma de filas.

Tomemos ahora $n = 1$. Para este caso $f(x) = x - x_i$; $i = 1, 2, \dots, k$, esto implica que $f'(x) = 1$.

De forma parecida a como se hizo con $n = 0$:

$$f'(x_i) = 1 \Rightarrow a_{i1}\mathbf{f}_1 + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Ahora, si $j = 1$, tenemos que: $\mathbf{f}_j = f(x_1) = \mathbf{f}(x_1) = x_1 - x_i$; $i = 1, 2, \dots, k$

Si $j \geq 2$, entonces: $\mathbf{f}_{j-\frac{1}{2}} = f(x_{j-\frac{1}{2}}) = x_{j-\frac{1}{2}} - x_i$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Al hacer estas sustituciones se obtiene:

$$a_{i1}(x_1 - x_i) + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}(x_{j-\frac{1}{2}} - x_i) = 1; \quad i = 1, \dots, k \quad (2.2.44)$$

Si se considera $n \geq 2$, se obtiene un resultado análogo al de la función de prueba usada para la divergencia (2.2.32), a saber:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = a_{i1}(x_1 - x_i)^n + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij}(x_{j-\frac{1}{2}} - x_i)^n = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.45)$$

Finalmente, al igual como se hizo en (2.2.33), en general el gradiente discreto evaluado en i , para un mallado intercalado no-uniforme se puede escribir así:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = a_{i1} (x_1 - x_i)^n + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} \left(x_{j-\frac{1}{2}} - x_i \right)^n = \delta_{1n}; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.46)$$

Donde n toma valores entre 0 y k . El miembro derecho de la ecuación es la ya mencionada *delta de Kronecker*, que sólo es no nula cuando $n = 1$.

Si el mallado es uniforme, la ecuación (2.2.46) se transforma en:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = a_{i1} (h - ih)^n + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (jh - h/2 - ih)^n = \delta_{1n}; \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Haciendo las manipulaciones algebraicas pertinentes, se llega a:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = 2^n a_{i1} (i - 1)^n + \sum_{j=2}^{\frac{3k}{2}} a_{ij} (2i + 1 - 2j)^n = \frac{-2}{h} \delta_{1n}; \quad (2.2.47)$$

Donde $i = 1, 2, \dots, k$ y $n = 0, 1, 2, \dots, k$

Esta ecuación es muy parecida a (2.2.37), poseen el miembro derecho idéntico, sólo difieren en el primer término de la sumatoria. Esto nos indica que el vector $\mathbf{c}$ que forma parte de $\mathbf{r}$ tiene la misma estructura para la divergencia como para el gradiente y es no nulo sí y sólo sí $n = 1$. Falta caracterizar las matrices de Vandermonde.

En efecto, de (2.2.47) se desprende que la matriz de Vandermonde V_i , tiene las entradas como sigue:

$$V_i = V(k; 2i - 2, 2i - 3, 2i - 5, \dots, 2i + 1 - 3k); \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.48)$$

Cada una de estas matrices tiene $\frac{3k}{2}$ entradas.

De forma explícita las k matrices de Vandermonde son:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V(k; 0, -1, -3, -5, \dots, 3 - 3k) \\
 V_2 &= V(k; 2, 1, -1, \dots, 5 - 3k) \\
 V_3 &= V(k; 4, 3, 1, \dots, 7 - 3k) \\
 &\vdots \\
 V_k &= V(k; 2k - 2, 2k - 3, 2k - 5, \dots, 1 - k)
 \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

2.3. Operadores Diferenciales Discretos Miméticos de Segundo Orden en $1D$

En esta sección se usará la metodología desarrollada por *Montilla-Cadenas-Castillo* para calcular los operadores discretos miméticos DIVERGENCIA y GRADIENTE de segundo orden, tanto en las filas interiores como en la frontera (método 2-2-2).

En adelante aparecerán con frecuencia, entre otras, las matrices Λ , Q y P . La primera es una matriz diagonal cuadrada (de orden k), que forma parte de las otras dos matrices en las primeras y últimas k filas. El último bloque se construye usando la definición de centro simetría y los elementos intermedios es un bloque de la matriz identidad (ver la sección 2.2.3). Para simplificar los cálculos aquí sólo se trabajará con las entradas distintas de 1 de Λ (2.2.19) y para Q y P el bloque referido a ésta.

Normalmente no se usarán las matrices completas Q y P , en consecuencia la parte de interés la denominaremos: $\hat{Q}$ y $\hat{P}$. el vector con las entradas de la diagonal de Λ se denominará $\hat{\Lambda}$.

Por otra parte, el factor $1/h$ no aparece en los cálculos a fin de simplificar los resultados.

2.3.1. Divergencia Mimética

La fórmula más sencilla para calcular la divergencia fue dada en el apartado 2.2.1, etiquetada con el número (2.2.4). La misma da una aproximación de segundo orden en cualquier mallado, tanto en el interior como en la frontera. A esta técnica se le denomina comúnmente *método 2-2-2*. Veremos que la metodología desarrollada en la sección 2.2, al ser aplicada a la matriz $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ que se genera mediante (2.2.4) coincide con el orden señalado. Esto es de esperarse puesto que la divergencia en el método de operadores de soporte es de orden 2 en todo el mallado.

Para una divergencia de segundo orden, $k = 2$, la expresión generadora de la matriz $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ es: $[0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0]$. Por otra parte, de acuerdo con la exigencia de no solapamiento para $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$, el mínimo número de filas que debe tener es $N = 5$; por lo tanto, la matriz $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ tendrá tamaño 5×6 , a saber:

$$\mathbf{S}_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Al sustituir en $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$, las dos primeras y las dos últimas filas con la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ y usando la propiedad de centrosimetría, se obtiene a $\mathcal{D}(A)$:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = Q\mathbf{S}_{\mathcal{D}} \quad (2.3.1)$$

El problema se reduce entonces a obtener la matriz A y la matriz Λ , ver (2.2.19) en el apartado 2.2.3, que conduce a la determinación de Q .

Para plantear el sistema (2.2.22) se necesitan dos matrices de Vandermonde. Usando (2.2.38) se llega a que las dos matrices son:

$$V_1 = V(2; 1, -1, -3) \text{ y } V_2 = V(2; 3, 1, -1)$$

A su vez $\mathbf{r} = (0, -2, 0, 0, -2, 0, -1, 0, 1)^T$

Con estos datos el sistema lineal (2.2.22) que permite calcular al vector

$$\mathbf{a}^T = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

queda estructurado como sigue:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema es fácilmente resoluble mediante el uso de un sistema computacional que realice cálculos algebraicos, como por ejemplo, Maple:

$$a_{11} = -1, a_{12} = 1, a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = -1, a_{23} = 1$$

La solución inmediata (compatibilidad del sistema) y los resultados de $\mathbf{a}$ que no producen ninguna modificación sobre $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$, es decir, $\mathcal{D} = \mathbf{S}_{\mathcal{D}}$, nos indican que $\mathcal{D}$ es mimética de segundo orden con el producto interno usual. Es obvio que Q es la matriz identidad de orden 5.

La matriz de divergencia mimética de segundo orden para $N = 5$ es la siguiente:

$$\mathcal{D}(A) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

2.3.2. Gradiente Mimético

La fórmula análoga para el gradiente, dada en (2.2.5), genera una aproximación del tipo 1-2-1, en otras palabras, este gradiente tendrá error de truncamiento de orden dos en el interior del mallado y orden uno en la frontera. Para este caso, el sistema que proponen Castillo-Grone, se torna inconsistente. Ello obliga a seguir una estrategia que consiste en la introducción de un producto interno generalizado (2.2.14), para poder obtener los operadores discretos miméticos. La metodología es análoga a la que se usó para la divergencia, salvo que las matrices de Vandermonde cambian por la naturaleza de las funciones de prueba.

Si ahora se usa la fórmula de aproximación para el gradiente, dada en (2.2.5) se obtiene la siguiente matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$:

$$\mathbf{S}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz generadora del gradiente no es mimética como se puede observar claramente. Pero además, aunque tiene orden de aproximación dos en las filas internas, en la frontera es de primer orden.

La matriz modificada $\mathcal{G}(A)$ es análoga a (2.3.1), puesto que, $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ y $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$ sólo difieren en la primera y última filas, donde precisamente A y A' actúan.

El planteamiento del sistema (2.2.22) requiere de dos matrices de Vandermonde, puesto que $k = 2$. Usando (2.2.49) se llega a que las dos matrices son:

$$V_1 = V(2; 0, -1, -3) \text{ y } V_2 = V(2; 2, 1, -1)$$

También (2.2.49) nos permite determinar el vector de términos independientes $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^9$:

$$\mathbf{r} = (0, -2, 0, 0, -2, 0, -1, 0, 1)^T$$

Con esta información el sistema de ecuaciones es:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

Este sistema, como se dijo, es incompatible. Por lo tanto, para hacerlo soluble se le eliminan la segunda y la quinta fila, a $\mathbf{M}$ y a $\mathbf{r}$. Nótese que estas filas son las

entradas de las matrices de Vandermonde para $n = 1$, en este caso las dos componentes correspondientes de $\mathbf{r}$ son las que tienen el valor -2.

Pues bien, el sistema reducido, visto en forma matricial, tiene por solución:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

A esta matriz se le ha denominado $\hat{A}$, porque en realidad no es la matriz buscada A . Para obtenerla se debe hallar la matriz de pesos P . P rescata la condición de suma de filas y columnas exigidas para la mimeticidad con respecto al producto interno pesado. Para este caso la condición de suma de filas queda expresado como sigue:

$$h(\mathbf{e}, \mathcal{G}(\mathbf{f}))_P = \mathbf{f}_N - \mathbf{f}_1, \text{ o más bien } h\mathbf{e}^T \mathcal{G}^T(\mathbf{f})P = (-1, 0, \dots, 0, 1)$$

Para hallar P , se define la matriz $\mathbf{M}_w$, que estará formada por las filas que se eliminaron en (2.3.3), luego se le post-multiplica con $\hat{\mathbf{a}}$ (vector de solución del sistema reducido). Los pesos $\hat{\Lambda}$ buscados resultan de multiplicar estos resultados por $-\frac{1}{2}$, este número proviene de las componentes que se le eliminó a $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{M}_w = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El producto descrito queda formalizado de la siguiente manera:

$$\hat{\Lambda} = \frac{\mathbf{M}_w \hat{\mathbf{a}}}{-2} \quad (2.3.5)$$

En consecuencia al efectuar este producto:

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 9/8 \end{pmatrix}$$

Se hace notar que Λ es una matriz diagonal, definida positiva de dimensión $k \times k$ y $\hat{\Lambda}$ es un vector que tiene las entradas de la diagonal de Λ . Se recuerda que la matriz P es diagonal definida positiva, se diferencia de la identidad en las dos primeras y dos últimas filas. En consonancia con las filas que se le modifican $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$. Las dos filas de diferencia tienen las componentes de la diagonal de Λ . Como la discretización de menor tamaño es $N = 5$, si $k = 2$, entonces la P más pequeña será:

$$P = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Ya estamos en condiciones de hallar la tan buscada matriz A , ésta se obtiene haciendo el producto:

$$A = \widehat{P^{-1}} \hat{A} \quad (2.3.6)$$

Esta fórmula se motiva de la siguiente manera: Si $\mathbf{v} \equiv 1$, el producto interno pesado del gradiente viene dado $(1, \mathcal{G}(\mathbf{f}))_P = \mathbf{f}_N - \mathbf{f}_1$ o $\mathcal{G}^T(\mathbf{f})P = \mathbf{f}_N - \mathbf{f}_1$. Como se afirmó (ver 2.2.3) el operador mimético de orden k , se obtiene pre-multiplicando la matriz generadora por la matriz de peso, por lo tanto: $\mathcal{G}^T(A)P = \mathbf{S}_{\mathcal{G}}$, a partir de aquí es inmediata (2.3.6) y haciendo el producto sólo en la parte modificada.

Finalmente, al efectuar este producto el resultado es:

$$A = \begin{pmatrix} -8/3 & 3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -3 & 8/3 \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

La matriz A' se definió en (2.2.18) y modifica las últimas dos filas del gradiente. A continuación exhibimos el gradiente mimético de orden dos con $N = 5$ para mallados intercalados uniformes. Obsérvese que la diferencia que tiene con $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$ es la primera y última fila. La h que aparece en el denominador, se obvió en los cálculos previos.

$$\mathcal{G} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

En el *Apéndice A* se presenta el código de todos los cálculos que antecedieron, hechos con el programa de cálculo simbólico MAPLE.

2.4. Operadores Diferenciales Discretos Miméticos de Cuarto Orden en $1D$

En esta sección, se desarrollan los cálculos necesarios, que conducen a obtener los operadores discretos miméticos divergencia y gradiente con error de truncamiento de cuarto orden.

Si Q es una matriz diagonal, con entradas positivas no nulas, el operador discreto divergencia o gradiente puede ser mimético respecto al producto interno pesado para $k \geq 2$. Esto es, si k es par, para el producto interno $\langle x, y \rangle_Q = y^T Q x$, se puede conseguir A de dimensión $k \times \frac{3}{2}k$, tal que $\mathcal{D}(A)$ sea conservativa y con el orden de aproximación deseado (k), tanto en el interior, como en la frontera.

2.4.1. Divergencia Mimética

Para la divergencia de cuarto orden ($k = 4$), el trabajo se centra en la matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ que puede ser vista en (2.2.17).

La matriz A que se debe encontrar tiene 4 filas y 6 columnas. En consecuencia, el sistema lineal posee 24 incógnitas.

Las cuatro matrices de Vandermonde están en el espacio vectorial $\mathbb{R}^{5 \times 6}$. Éstas acumulan 20 filas para la matriz $\mathbf{M}$, además, se le debe adicionar el bloque de 4 matrices identidad de orden 6. Este bloque se anexa para satisfacer la condición mimética de suma de columnas, el orden se desprende a que la matriz A modifica 6 columnas de $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$. Por todo lo anterior, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{26 \times 24}$.

Las cuatro matrices de Vandermonde se presentan enseguida, las mismas fueron obtenidas usando la fórmula (2.2.38).

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 1 & 1 & 9 & 25 & 49 & 81 \\ 1 & -1 & -27 & -125 & -343 & -729 \\ 1 & 1 & 81 & 625 & 2401 & 6561 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 25 & 49 \\ 27 & 1 & -1 & -27 & -125 & -343 \\ 81 & 1 & 1 & 81 & 625 & 2401 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 25 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ 125 & 27 & 1 & -1 & -27 & -125 \\ 625 & 81 & 1 & 1 & 81 & 625 \end{bmatrix} \quad V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 49 & 25 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 343 & 125 & 27 & 1 & -1 & -27 \\ 2401 & 625 & 81 & 1 & 1 & 81 \end{bmatrix}$$

Para el vector $\mathbf{r}$ de términos independientes, nos valemos también de (2.2.38), pero para las componentes de $\mathbf{d}$ se debe tomar en consideración las seis primeras columnas de la matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$.

$$\mathbf{r} = \frac{1}{h} \left(0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -\frac{1}{24}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{24} \right)^T$$

A la matriz $\mathbf{M}$ del sistema lineal que permite hallar a la matriz A , se le debe eliminar las filas: 2, 7, 12 y 17. De igual forma se procede con las entradas que tienen el valor -2 de $\mathbf{r}$.

Con esta información estamos en condiciones de plantear el sistema de ecuaciones, sin embargo, en virtud de su tamaño no es fácil presentarlo aquí, pero en el *Apéndice A* puede observarse en detalle los aspectos relacionados con este cálculo.

El sistema reducido: $\widehat{M}a = \widehat{\mathbf{r}}$ es consistente indeterminado. Su solución parametrizada la mostraremos de forma análoga a como se hizo con el gradiente orden dos (2.3.4), pero por incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{6851}{6912} + p_1 + p_2 + p_3, & a_{12} &= \frac{8153}{13824} - 5p_1 - 5p_2 - 5p_3, \\ a_{13} &= \frac{1289}{1536} + 10p_1 + 10p_2 + 10p_3, & a_{14} &= -\frac{9005}{13824} - 10p_1 - 10p_2 - 10p_3, \\ a_{15} &= \frac{3529}{13824} + 5p_1 + 5p_2 + 5p_3, & a_{16} &= -1/24 - p_1 - p_2 - p_3, \\ a_{21} &= \frac{143}{4608} - p_1, & a_{22} &= -\frac{429}{512} + 5p_1, & a_{23} &= \frac{429}{512} - 10p_1, & a_{24} &= -\frac{143}{4608} + 10p_1, \\ a_{25} &= -5p_1, & a_{26} &= p_1 & a_{31} &= -p_2, & a_{32} &= \frac{25}{512} + 5p_2, \end{aligned}$$

$$a_{33} = -\frac{675}{512} - 10p_2, \quad a_{34} = \frac{675}{512} + 10p_2, \quad a_{35} = -\frac{25}{512} - 5p_2, \quad a_{36} = p_2$$

$$a_{41} = -\frac{551}{13824} - p_3, \quad a_{42} = \frac{2755}{13824} + 5p_3, \quad a_{43} = -\frac{551}{1536} - 10p_3, \quad a_{44} = -\frac{9367}{13824} + 10p_3,$$

$$a_{45} = \frac{6061}{6912} - 5p_3, \quad a_{46} = p_3$$

Esta solución parametricazada naturalmente no es única. Ahora bien, se debe seleccionar valores para los parámetros adecuadamente. Entre las infinitas divergencias que se pueden obtener, pretendemos determinar una familia de parámetros que modifique lo menos posible la matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$. Las pruebas conducen a que si: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ y $p_3 = p_3 = -\frac{551}{13824}$, se logra obtener la divergencia dada por Castillo y Grone [1].

Con esta familia, se tiene que:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{4751}{4608} & \frac{101}{128} & \frac{6091}{13824} & -\frac{1165}{4608} & \frac{43}{768} & -\frac{25}{13824} \\ \frac{143}{4608} & -\frac{429}{512} & \frac{429}{512} & -\frac{143}{4608} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{512} & -\frac{675}{512} & \frac{675}{512} & -\frac{25}{512} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{551}{13824} & -\frac{551}{512} & \frac{551}{512} & -\frac{551}{13824} \end{bmatrix}$$

Para hallar a $\hat{\Lambda}$ hacemos el producto que se indicó en (2.3.5), formando a la matriz $\mathbf{M}_w$ con las filas eliminadas de $\mathbf{M}$.

$$\hat{\Lambda} = \left(\frac{649}{576}, \frac{143}{192}, \frac{75}{64}, \frac{551}{576} \right)$$

Con estos pesos formamos la matriz diagonal Q . Como $k = 4$, el mínimo número de puntos que se requieren en la discretización, para evitar el solapamiento es $N = 11$.

Las entradas en la diagonal de Q serán:

$$q_{11} = \frac{649}{576}, q_{22} = \frac{143}{192}, q_{33} = \frac{75}{64}, q_{44} = \frac{551}{576}, q_{55} = 1, \dots$$

Las últimas cuatro filas de Q tendrán estas mismas entradas. Creemos conveniente señalar, que en el *Apéndice B* se pueden observar los detalles del cálculo y las matrices completas.

Al obtener A como en (2.3.6), se observa que sólo se modifica la primera fila de $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$. Las dos primeras filas de $\mathcal{D}(A)$ la mostramos a continuación:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{15576} & -\frac{129}{2596} & \frac{1165}{5192} & -\frac{6091}{15576} & -\frac{909}{1298} & \frac{4751}{5192} \end{pmatrix}$$

2.4.2. Gradiente Mimético

Para calcular el gradiente mimético de cuarto orden sobre mallados intercalados uniformes para una función $\mathbf{f}$ con dominio en las celdas (función celda-valuada), se usa para determinar la matriz generadora $\mathbf{S}_{\mathcal{G}}$, la fórmula usual de diferencia centrada:

$$(\mathcal{G}(\mathbf{f}))_i = \frac{1}{24h} (f_{i-3/2} - 27f_{i-1/2} + 27f_{i+1/2} - f_{i+3/2}) \quad (2.4.1)$$

La matriz generadora del gradiente mimético de cuarto orden, $\mathbf{S}_G$, con el bloque matricial que incorpora a A se presenta a continuación. Como $k = 4$, A tiene 4 filas y 6 columnas.

$$\mathcal{G}(A) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{46} & -a_{45} & -a_{44} & -a_{43} & -a_{42} & -a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{36} & -a_{35} & -a_{34} & -a_{33} & -a_{32} & -a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{26} & -a_{25} & -a_{24} & -a_{23} & -a_{22} & -a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{16} & -a_{15} & -a_{14} & -a_{13} & -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

Esta matriz se construyó asumiendo que $N = 11$, el tamaño más pequeño de la discretización para que no se produzca solapamiento. Las últimas cuatro filas de componentes no nulas constituyen la matriz A' .

Como A tiene 24 elementos el vector $\mathbf{a}$ poseerá este número de incógnitas:

$$\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{16}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{26}, \dots, a_{41}, a_{42}, \dots, a_{46})^T$$

Para plantear el sistema $\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{r}$, se requiere conocer las matrices de Vandermonde.

Si en la fórmula (2.2.49) se hace $k = 4$, se tiene:

$$V_i = V(4; 2i - 2, 2i - 3, 2i - 5, 2i - 7, 2i - 9, 2i - 11); \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (2.4.3)$$

Cada matriz tiene naturalmente 6 entradas. Estas son las cuatro matrices:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 9 & 25 & 49 & 81 \\ 0 & -1 & -27 & -125 & -343 & -729 \\ 0 & 1 & 81 & 625 & 2401 & 6561 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 4 & 1 & 1 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 1 & -1 & -27 & -125 & -343 \\ 16 & 1 & 1 & 81 & 625 & 2401 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 16 & 9 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ 64 & 27 & 1 & -1 & -27 & -125 \\ 256 & 81 & 1 & 1 & 81 & 625 \end{bmatrix} \quad V_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 36 & 25 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 216 & 125 & 27 & 1 & -1 & -27 \\ 1296 & 625 & 81 & 1 & 1 & 81 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices estamos en condiciones de construir la matriz M de acuerdo con (2.2.25). Esta matriz de coeficientes del sistema tiene 26 filas y 24 columnas. Son 20 filas correspondientes a las matrices de Vandermonde y seis filas más por el bloque de matrices identidad (I_6). Esta matriz puede ser observada en el *Apéndice B*.

El vector de términos independientes $\mathbf{r}$ tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{r} = \left[0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, 0, -1, 0, 0, -\frac{1}{24}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{24} \right]^T$$

Las primeras 20 componentes corresponden al lado derecho de (2.2.49) y las últimas seis satisfacen la condición de suma de columnas. Los números $-1/24, 13/12, -1/24$, se obtienen aplicando esta condición a la matriz (2.4.2). Obsérvese las columnas 4, 5 y 6; estos números son los que precisamente las anulan.

Ahora bien, para plantear el sistema se eliminan de $\mathbf{M}$ las filas de las matrices de Vandermonde cuyos entradas tienen potencia $n = 1$ y que hacen al sistema inconsistente. Estas son la 2, 7, 12 y 17. Debemos hacer notar que, precisamente en estas filas, $\mathbf{r}$ tiene el valor -2. Además son las únicas filas que violan la condición de mimeticidad de suma de filas (anulación para constantes). Sin embargo, estas filas son cruciales para obtener la matriz de pesos.

Los detalles del sistema se pueden observar en el *Apéndice B*. Aquí, presentamos una de las soluciones triparamétrica de las ecuaciones:

$$a_{11} = -\frac{3901}{3780} + \frac{128}{35} p_1 + \frac{128}{35} p_2 + \frac{128}{35} p_3, \quad a_{12} = \frac{10789}{9216} - 9 p_1 - 9 p_2 - 9 p_3,$$

$$a_{13} = -\frac{421}{27648} + 12 p_1 + 12 p_2 + 12 p_3, \quad a_{14} = -\frac{4063}{15360} - \frac{54}{5} p_1 - \frac{54}{5} p_2 - \frac{54}{5} p_3,$$

$$a_{15} = \frac{11789}{64512} + \frac{36}{7} p_1 + \frac{36}{7} p_2 + \frac{36}{7} p_3, \quad a_{16} = -1/24 - p_1 - p_2 - p_3,$$

$$a_{21} = \frac{473}{2520} - \frac{128}{35} p_1, \quad a_{22} = -\frac{14663}{9216} + 9 p_1, \quad a_{23} = \frac{13717}{9216} - 12 p_1, \quad a_{24} = -\frac{473}{5120} + \frac{54}{5} p_1,$$

$$a_{25} = \frac{473}{64512} - \frac{36}{7} p_1, \quad a_{26} = p_1, \quad a_{31} = -\frac{128}{35} p_2, \quad a_{32} = \frac{343}{9216} + 9 p_2,$$

$$a_{33} = -\frac{1029}{1024} - 12 p_2, \quad a_{34} = \frac{1029}{1024} + \frac{54}{5} p_2, \quad a_{35} = -\frac{343}{9216} - \frac{36}{7} p_2, \quad a_{36} = p_2$$

$$a_{41} = -\frac{1177}{7560} - \frac{128}{35} p_3, \quad a_{42} = \frac{1177}{3072} + 9 p_3, \quad a_{43} = -\frac{12947}{27648} - 12 p_3, \quad a_{44} = -\frac{3531}{5120} + \frac{54}{5} p_3,$$

$$a_{45} = \frac{20009}{21504} - \frac{36}{7} p_3, \quad a_{46} = p_3$$

Esta familia nos permite determinar un sin número de gradientes miméticos de orden cuatro. Para obtener el gradiente dado por *Castillo-Grone* [1], las pruebas nos conducen a que debemos seleccionar los parámetros de la siguiente manera:

$$p_1 = 473/9216, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -1177/27648$$

Al ser sustituidos y evaluados en las expresiones previas, se halla la matriz $\hat{A}$, que como se ha dicho no es la matriz A buscada.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{10063}{9216} & \frac{2483}{27648} & -\frac{1103}{3072} & \frac{2099}{9216} & -\frac{697}{13824} \\ 0 & -\frac{5203}{4608} & \frac{8041}{9216} & \frac{473}{1024} & -\frac{2365}{9216} & \frac{473}{9216} \\ 0 & \frac{343}{9216} & -\frac{1029}{1024} & \frac{1029}{1024} & -\frac{343}{9216} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1177}{27648} & -\frac{1177}{1024} & \frac{1177}{1024} & -\frac{1177}{27648} \end{pmatrix}$$

Para conseguir la matriz A que aparece en $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}$ (2.4.2), se requiere la matriz de pesos P . Como se ha mencionado no se puede obtener operadores discretos de orden $k \geq 2$ con el producto interno usual, pero sí con el producto interno pesado.

Calculemos el vector $\hat{\Lambda}$, cuyas componentes son los elementos de la matriz diagonal P en las cuatro primeras y cuatro últimas filas ($k=4$).

Para el cálculo se usa, como fue realizado en los casos previos, el producto:

$$\hat{\Lambda} = -\frac{1}{2}\mathbf{M}_w\hat{\mathbf{a}}$$

Donde $\mathbf{M}_w$ es la matriz formada por las cuatro filas que se le eliminaron a $\mathbf{M}$. En consecuencia, $\mathbf{M}_w$ es de orden 4×24 . Naturalmente que el vector columna $\mathbf{a}$ está formado por los elementos de $\hat{A}$ la solución del sistema reducido.

A continuación presentamos a $\hat{\Lambda}$ y a $\hat{P}$.

$$\hat{\Lambda} = \left(\frac{407}{1152} \quad \frac{473}{384} \quad \frac{343}{384} \quad \frac{1177}{1152} \right)^T, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{407}{1152} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{473}{384} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{343}{384} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1177}{1152} \end{pmatrix}$$

Finalmente se obtiene a la auténtica matriz A , su cálculo está dado por: $A = \widehat{P^{-1}}\hat{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1152}{407} & \frac{10063}{3256} & \frac{2483}{9768} & -\frac{3309}{3256} & \frac{2099}{3256} & -\frac{697}{4884} \\ 0 & -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & 3/8 & -\frac{5}{24} & 1/24 \\ 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 \end{pmatrix}$$

Al sustituir esta matriz en (2.4.2) se obtiene un gradiente con modificación sólo en las dos primeras y dos últimas filas.

$$G(A) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\frac{1152}{407} & \frac{10063}{3256} & \frac{2483}{9768} & -\frac{3309}{3256} & \frac{2099}{3256} & -\frac{697}{4884} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & 3/8 & -\frac{5}{24} & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/24 & \frac{5}{24} & -3/8 & -\frac{17}{24} & \frac{11}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{697}{4884} & -\frac{2099}{3256} & \frac{3309}{3256} & -\frac{2483}{9768} & -\frac{10063}{3256} & \frac{1152}{407} \end{pmatrix}$$

2.5. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DISCRETA GENERALIZADA

En la sección 2.2.1 se estableció que la ley de conservación discreta, puede ser expresada en términos del producto interno usual, mediante la ecuación (2.2.11), el miembro derecho de esta ecuación contiene una matriz $\mathbf{B}$ de orden $(N+2) \times (N+1)$ cuya forma es bastante elemental (2.2.12), puesto que el primer elemento es -1 y el último 1 , los demás son nulos. Esta forma de $\mathbf{B}$ es natural a efectos de la discretización

mimética, puesto que, garantiza la verificación del teorema de la Divergencia Discreto. Es decir, $\mathbf{B}$ recoge los requerimientos de conservación global.

Sin embargo, como se demostró en (2.2.1) para operadores discretos de orden mayor o igual a dos, no es posible construir operadores miméticos, si el producto interno es el usual. Así que, se introdujo el producto interno generalizado (o pesado si la matriz de pesos es diagonal). Si usamos las definiciones (2.2.11 y 2.2.14) dadas en los apartados 2.2.1 y 2.2.2 respectivamente, tenemos la siguiente versión discreta del Teorema de la Divergencia Generalizado:

$$\left\langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \right\rangle_Q + \left\langle \mathcal{G}^t(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \right\rangle_P = \left\langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}} \right\rangle \quad (2.5.1)$$

Los objetos que aparecen ya nos son conocidos. No obstante, $\mathbf{B}$ para el producto interno pesado, lamentablemente no toma la forma elemental que para el producto interno usual. En lo que sigue se usará (2.5.1) para calcular la matriz $\mathbf{B}$. Se observará en cada uno de los resultados que esta matriz es simétrica centro inclinada.

De la ecuación previa se desprende que $\mathbf{B}$ se puede calcular directamente usando la expresión:

$$\mathbf{B} = \widehat{Q}\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}) + \mathcal{G}^t P \quad (2.5.2)$$

La divergencia se ha aumentado en dos filas de ceros (primera y última) para hacer la suma consistente, de igual forma se hace con la matriz Q , para la misma la entrada en la diagonal es un uno (puesto que es positiva definida). Recordemos que el gradiente es $(N+1) \times (N+2)$, la divergencia aumentada $\widehat{\mathcal{D}}$ es $(N+2) \times (N+1)$, al trasponer a $\mathcal{G}$ obtendremos las dimensiones deseadas. También se ha afirmado que P y Q son matrices centro simétricas.

Los códigos en Maple de las operaciones efectuadas pueden ser observados en el *Apéndice C*.

2.5.1. Segundo Orden

Para calcular la matriz $\mathbf{B}$ asociada a los operadores discretos divergencia ($\mathcal{D}$) y gradiente ($\mathcal{G}$) de segundo orden, naturalmente se requiere de las matrices que los determinan completas y sus respectivas matrices de pesos Q y P .

Divergencia discreta mimética aumentada en dos filas y la matriz de pesos Q , también con las dimensiones adecuadas para que el producto esté definido:

$$h\hat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La h que acompaña los operadores se ha colocado de esta manera para simplificar el tamaño de las matrices.

Operador gradiente y su respectiva matriz de pesos P :

$$h\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Finalmente al usar la fórmula (2.5.2), tenemos:

$$h\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.3)$$

Obsérvese que en efecto la matriz $\mathbf{B}$ es simétrica centro inclinada. Además coincide con el resultado dado por Castillo y Yasuda en [19]. Las dimensiones son también como se señaló.

2.5.2. Cuarto Orden

Para los operadores miméticos de orden cuatro, hagamos lo propio, que en el caso anterior. Sin embargo, las dimensiones de las matrices se van haciendo incómodos.

Operador de divergencia discreto $h\mathcal{D}$ de cuarto orden aumentado en dos filas y sus matriz de pesos Q a la derecha. Para este caso se ha tomado $N = 11$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{15576} & -\frac{129}{2596} & \frac{1165}{5192} & -\frac{6091}{15576} & -\frac{909}{1298} & \frac{4751}{5192} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{649}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{143}{192} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{75}{64} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{551}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{551}{576} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{75}{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{143}{192} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{649}{576} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga tenemos el gradiente $h\mathcal{G}$ y su matriz de pesos P :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1152}{407} & \frac{10063}{3256} & \frac{2483}{9768} & -\frac{3309}{3256} & \frac{2099}{3256} & -\frac{697}{4884} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{407}{1152} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{473}{384} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{343}{384} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1177}{1152} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para terminar, llegamos a que el resultado de las operaciones nos permite conseguir la hermosa matriz $\mathbf{B}$:

$$h\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{187}{3072} & -\frac{1567}{4608} & \frac{13211}{27648} & -\frac{1165}{4608} & \frac{43}{768} & -\frac{25}{13824} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3341}{27648} & \frac{319}{9216} & -\frac{171}{1024} & \frac{319}{27648} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1103}{3072} & \frac{523}{1024} & -\frac{321}{1024} & \frac{173}{1024} & -\frac{11}{1536} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2099}{9216} & -\frac{2365}{9216} & \frac{73}{27648} & \frac{75}{1024} & -\frac{25}{512} & \frac{25}{13824} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{697}{13824} & \frac{473}{9216} & 0 & -\frac{25}{27648} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{27648} & 0 & -\frac{473}{9216} & \frac{697}{13824} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{13824} & \frac{25}{512} & -\frac{75}{1024} & -\frac{73}{27648} & \frac{2365}{9216} & -\frac{2099}{9216} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{1536} & -\frac{173}{1024} & \frac{321}{1024} & -\frac{523}{1024} & \frac{1103}{3072} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{319}{27648} & \frac{171}{1024} & -\frac{319}{9216} & -\frac{3341}{27648} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{13824} & -\frac{43}{768} & \frac{1165}{4608} & -\frac{13211}{27648} & \frac{1567}{4608} & -\frac{187}{3072} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6. OPERADOR LAPLACIANO DISCRETO

Una gran variedad de problemas reales se modelan mediante ecuaciones de segundo orden, uno de cuyos componentes es el operador laplaciano. Para el caso continuo, éste se define como la divergencia del gradiente, es decir, dado un campo escalar f , se obtiene mediante el operador ∇ (nabla) y a éste a su vez se le aplica la divergencia.

$$Lap = \nabla \cdot \nabla f \quad (2.6.1)$$

En el caso discreto es bien sencillo, porque simplemente se debe efectuar un producto matricial entre la divergencia y el gradiente.

$$Lap = \mathcal{D}\mathcal{G} \quad (2.6.2)$$

Así, en el caso unidimensional, usando los operadores divergencia y gradiente de orden 2-2-2, el operador laplaciano viene dado como se muestra a continuación.

$$Lap = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 8/3 & -4 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/3 & -4 & 8/3 \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

En el caso de operadores de orden 4-4-4 (divergencia y gradiente), el operador laplaciano viene dado como sigue:

$$Lap := \begin{bmatrix} \frac{684144}{264143} & \frac{-131368753}{38036592} & \frac{-3141579}{16905152} & \frac{31900123}{16905152} & \frac{-80675087}{76073184} & \frac{1917273}{8452576} & \frac{-161}{41536} & \frac{25}{373824} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-48}{407} & \frac{11789}{9768} & \frac{-5015}{2442} & \frac{1381}{1628} & \frac{409}{2442} & \frac{-499}{9768} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-49}{576} & \frac{773}{576} & \frac{-725}{288} & \frac{389}{288} & \frac{-53}{576} & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{576} & \frac{-3}{32} & \frac{87}{64} & \frac{-365}{144} & \frac{87}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{-3}{32} & \frac{87}{64} & \frac{-365}{144} & \frac{87}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{-3}{32} & \frac{87}{64} & \frac{-365}{144} & \frac{87}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{1}{576} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{-3}{32} & \frac{87}{64} & \frac{-365}{144} & \frac{87}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{1}{576} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{-3}{32} & \frac{87}{64} & \frac{-365}{144} & \frac{87}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{1}{576} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{576} & \frac{-53}{576} & \frac{389}{288} & \frac{-725}{288} & \frac{773}{576} & \frac{-49}{576} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-499}{9768} & \frac{409}{2442} & \frac{1381}{1628} & \frac{-5015}{2442} & \frac{11789}{9768} & \frac{-48}{407} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{373824} & \frac{-161}{41536} & \frac{1917273}{8452576} & \frac{-80675087}{76073184} & \frac{31900123}{16905152} & \frac{-3141579}{16905152} & \frac{-131368753}{38036592} & \frac{684144}{264143} \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

OPERADORES DIFERENCIALES DISCRETOS MIMÉTICOS EN $2D$

En este capítulo se usará una extensión de la metodología desarrollada por *Montilla-Cadenas-Castillo* para calcular los operadores discretos miméticos DIVERGENCIA y GRADIENTE en $2D$ con un orden de aproximación $2-2-2$ y $4-4-4$ para mallados tensoriales uniformes.

3.1. Operadores Diferenciales Discretos Miméticos de Segundo Orden en $2D$

La celda genérica de un mallado intercalado tensorial uniforme tiene la siguiente forma:

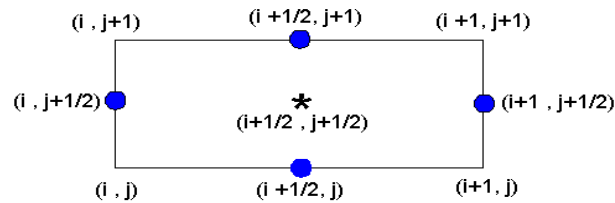


Figura 3.1: Celda genérica

en donde cada uno de los puntos representa los nodos, sobre los cuales se calculará el operador gradiente. Por otro lado, el asterisco hace referencia a la celda, lugar sobre el cual se calculará el operador de divergencia.

3.1.1. Divergencia Mimética de Segundo Orden

A efectos de calcular el *operador diferencial de divergencia discreto mimético en 2D* para un orden 2-2-2, es suficiente considerar un mallado tensorial uniforme cuadrado con cinco celdas a lo largo del eje X y cinco celdas a lo largo del eje Y , ya que este garantiza que el orden de aproximación de los operadores es el deseado. Esto es, siguiendo la metodología de *Montilla-Cadenas-Castillo*, descrita en 2.2, el mallado en referencia queda como se muestra a continuación (ver figura 3.2).

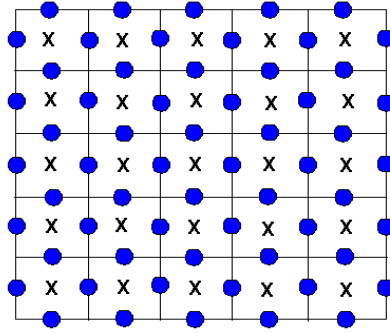


Figura 3.2: Mallado genérico

Si $F(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, donde e_1 y e_2 son los vectores canónicos.

La divergencia continua para F es el escalar:

$$\nabla \cdot F(x, y) = P_x(x, y) + Q_y(x, y) \quad (3.1.1)$$

Si $V(x_i, y_j) = V_1(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})e_1 + V_2(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)e_2$ es una aproximación discreta de F , entonces el análogo discreto de (3.1.1) es:

$$\mathcal{D}V\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{D}_x V_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{D}_y V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x V_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{x_{i+1} - x_i}{h_x} ; i = 1, \dots, N \\ \mathcal{D}_y V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_y} ; j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Ahora bien, un aspecto importante a considerar, a objeto de obtener el operador matricial $\mathcal{D}$ en el plano cartesiano, es cómo hacer el recorrido sobre los nodos del mallado, asumiendo que V_1 y V_2 son funciones discretas nodales. Con el fin de conseguir el objetivo planteado, es suficiente hacer en primer lugar un recorrido fila a fila (de izquierda a derecha) de la malla para V_1 (componente de $\mathcal{D}$ a lo largo del eje X) y columna a columna en la malla para V_2 (componente de $\mathcal{D}$ a lo largo del eje Y). Obsérvese la numeración de nodos en la figura (3.3). De esta manera, las funciones discretas V_1 y V_2 quedan como se muestra a continuación. Los primeros 30 corresponden a V_1 y los subsiguientes a V_2 .

$$V_1 = \left((1, 3/2) (2, 3/2) \cdots (6, 3/2) (1, 5/2) (2, 5/2) \cdots (6, 5/2) \cdots (1, 11/2) (2, 11/2) \cdots (6, 11/2) \right)^T \quad (3.1.3)$$

$$V_2 = \left((3/2, 1) (3/2, 2) \cdots (3/2, 6) (5/2, 1) (5/2, 2) \cdots (5/2, 6) \cdots (11/2, 1) (11/2, 2) \cdots (11/2, 6) \right)^T \quad (3.1.4)$$

Es decir, las discretizaciones nodales de P y Q respectivamente. Es claro que $V_1\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$ significa $V_1\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)$ al igual que para V_2 . Es decir, la función discreta evaluada en el punto $\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)$.

En consecuencia,

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

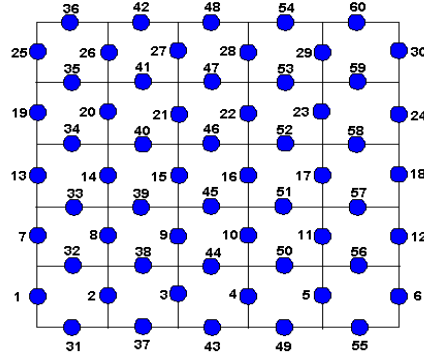


Figura 3.3: Recorrido de la divergencia

Es importante recordar que la divergencia tiene dominio en los nodos del mallado ($\mathcal{D} : \mathbb{H}\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{C}$), lo que quiere decir que ésta será calculada sobre las celdas del mallado, usando para ello los nodos del mismo.

De acuerdo con el mallado (ver figura 3.3) y el recorrido propuesto, $\mathcal{D}$ es una matriz que tiene tantas filas como celdas posea la malla. Para el caso $k = 2$ harán falta como mínimo 25 celdas (5×5); en general, para M celdas a lo largo del eje X y N celdas a lo largo del eje Y , hay NM filas en $\mathcal{D}$. Respecto a las columnas de $\mathcal{D}$, están determinadas por la función V , para el mallado descrito, V tiene un rango de 60 elementos como se puede observar en las expresiones (3.1.3), (3.1.4) y (3.1.5). Por lo tanto, $\mathcal{D}$ posee 60 columnas, es decir, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{25 \times 60}$.

En cuanto a la estructura de $\mathcal{D}$, puede ser interpretada como una matriz en bloques. Cada bloque constituye el cálculo de la derivada discreta (Operador Diferencial Discreto Mimético en 1D) en cada una de las filas (componente de $\mathcal{D}$ a lo largo del eje X , $\mathcal{D}_x$) y columnas (componentes de $\mathcal{D}$ a lo largo del eje Y , $\mathcal{D}_y$).

Para el caso 2-2-2 ($k = 2$) y con el mallado mínimo seleccionado, $\mathcal{D}$ posee cinco bloques, tanto de $\mathcal{D}_x$ como de $\mathcal{D}_y$. Los bloques $\mathcal{D}_x$ toman la forma que sigue:

$$\mathcal{D}_x = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

donde $\mathcal{D}_x \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$.

Estos cinco bloques $\mathcal{D}_x$ aportan 30 columnas a la matriz $\mathcal{D}$ y naturalmente sus 25 filas. Las restantes columnas son aportadas por los bloques correspondientes a $\mathcal{D}_y$.

No obstante, los bloques $\mathcal{D}_y$ tienen una particularidad, están caracterizados por el recorrido propuesto y de acuerdo con la función V , tienen 25 filas y 6 columnas. Esto hace que los bloques $\mathcal{D}_y$ (aproximación de la derivada para V_2) tengan entradas no nulas de acuerdo con ésta.

Los bloques serán identificados como $\mathcal{D}_{y_1}, \mathcal{D}_{y_2}, \dots, \mathcal{D}_{y_5}$.

$$\mathcal{D}_y = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{y_1} & \mathcal{D}_{y_2} & \mathcal{D}_{y_3} & \mathcal{D}_{y_4} & \mathcal{D}_{y_5} \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

Si los elementos genéricos de los bloques $\mathcal{D}_{y_j}$ con $j = 1, \dots, 5$, son respectivamente $d_{i,j}^1, d_{i,j}^2, \dots, d_{i,j}^5$; las entradas no nulas para cada uno de los $\mathcal{D}_{y_j}$ son:

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_1}$

$$\begin{aligned} d_{1,1}^1 &= -1 & d_{1,2}^1 &= 1 & d_{6,2}^1 &= -1 & d_{6,3}^1 &= 1 \\ d_{11,3}^1 &= -1 & d_{11,4}^1 &= 1 & d_{16,4}^1 &= -1 & d_{16,5}^1 &= 1 \\ d_{21,5}^1 &= -1 & d_{21,6}^1 &= 1 & & & & \end{aligned}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_2}$

$$\begin{aligned} d_{2,1}^2 &= -1 & d_{2,2}^2 &= 1 & d_{7,2}^2 &= -1 & d_{7,3}^2 &= 1 \\ d_{12,3}^2 &= -1 & d_{12,4}^2 &= 1 & d_{17,4}^2 &= -1 & d_{17,5}^2 &= 1 \\ & & d_{22,5}^2 &= -1 & d_{22,6}^2 &= 1 & & \end{aligned}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_3}$

$$\begin{aligned} d_{3,1}^3 &= -1 & d_{3,2}^3 &= 1 & d_{8,2}^3 &= -1 & d_{8,3}^3 &= 1 \\ d_{13,3}^3 &= -1 & d_{13,4}^3 &= 1 & d_{18,4}^3 &= -1 & d_{18,5}^3 &= 1 \\ & & d_{23,5}^3 &= -1 & d_{23,6}^3 &= 1 & & \end{aligned}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_4}$

$$\begin{aligned} d_{4,1}^4 &= -1 & d_{4,2}^4 &= 1 & d_{9,2}^4 &= -1 & d_{9,3}^4 &= 1 \\ d_{14,3}^4 &= -1 & d_{14,4}^4 &= 1 & d_{19,4}^4 &= -1 & d_{19,5}^4 &= 1 \\ & & d_{24,5}^4 &= -1 & d_{24,6}^4 &= 1 & & \end{aligned}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_5}$

$$\begin{aligned} d_{5,1}^5 &= -1 & d_{5,2}^5 &= 1 & d_{10,2}^5 &= -1 & d_{10,3}^5 &= 1 \\ d_{15,3}^5 &= -1 & d_{15,4}^5 &= 1 & d_{20,4}^5 &= -1 & d_{20,5}^5 &= 1 \\ & & d_{25,5}^5 &= -1 & d_{25,6}^5 &= 1 & & \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, $\mathcal{D}$ tiene una estructura en bloques como sigue:

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{D}_x^{5 \times 6} & & & & & & & & \\ & \mathcal{D}_x^{5 \times 6} & & & & & & & \\ & & \mathcal{D}_x^{5 \times 6} & & & & & & \\ & & & \mathcal{D}_x^{5 \times 6} & & & & & \\ & & & & \mathcal{D}_x^{5 \times 6} & & & & \\ & & & & & \mathcal{D}_{y_1}^{25 \times 6} & \mathcal{D}_{y_2}^{25 \times 6} & \mathcal{D}_{y_3}^{25 \times 6} & \mathcal{D}_{y_4}^{25 \times 6} & \mathcal{D}_{y_5}^{25 \times 6} \\ & & & & & & & & & \end{array} \right)_{25 \times 60} \quad (3.1.8)$$

Se puede observar que $\mathcal{D}_x$ posee una estructura en bloques de dimensión 5×6 correspondientes a las componentes a lo largo del eje X , que son precisamente

el operador diferencial de divergencia discreto mimético en 1D. En el caso de $\mathcal{D}_y$ puede observarse que su estructura también corresponde a bloques conformados por los elementos del operador de divergencia unidimensional, con la salvedad que los elementos se desplazan una posición en las filas bloque a bloque, es decir, el elemento que en el bloque $\mathcal{D}_{y_1}$ ocupa la posición $d(1, 1)$, en el bloque $\mathcal{D}_{y_2}$ ocupa la posición $d(2, 1)$.

En general, las columnas de $\mathcal{D}$ se pueden determinar para un mallado tensorial uniforme de M celdas a lo largo del eje X y N celdas a lo largo del eje Y con la fórmula $2NM + 2N$.

Algo interesante es notar la cantidad de elementos no nulos presentes en cada uno de los operadores, comparar el resultado entre divergencia y gradiente, pero además entre ellos mismos, a medida que el orden del operador aumenta. En el caso de la divergencia de orden 2, mostrada anteriormente, la cantidad de elementos no nulos es de 100, representando un 6,66 % del total de elementos.

Fórmulas de Aproximación de la Derivada

Al aplicar los operadores miméticos con intención de obtener una aproximación de la derivada, es posible conseguir fórmulas que hacen sencillo el cálculo de dicha aproximación, bien sea en una celda o en un nodo del mallado en consideración, para la divergencia o el gradiente respectivamente.

A continuación se muestra la fórmula de aproximación de la derivada dado el operador de divergencia mimética bidimensional de orden $k = 2$. En adelante se considerará un mallado tensorial de tamaño $N \times M$, en donde N y M representan el número de celdas del mallado a lo largo de los ejes coordenados X e Y respectivamente.

$$\mathcal{D}\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = (i^n - (i-1)^n)h_x^{n-1} + (j^n - (j-1)^n)h_y^{n-1} \quad ; i = 1, \dots, N \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, M$$

3.1.2. Gradiente Mimético de Segundo Orden

El cálculo del Operador Diferencial Mimético Gradiente en dos dimensiones, fundamentado en su análogo unidimensional, se puede obtener, escogiendo un recorrido adecuado para las celdas del mallado (ver figura 3.4), elementos que serán usados a efectos de la aproximación; además, se deben incorporar los nodos frontera, tanto en la dirección horizontal como vertical.

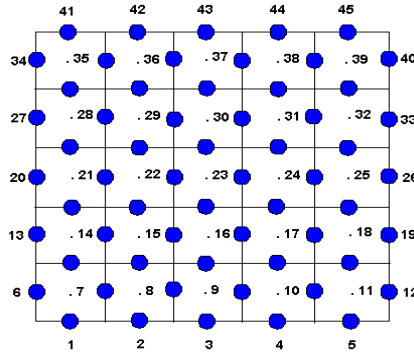


Figura 3.4: Recorrido del gradiente

Dimensión del Operador Diferencial Discreto Mimético en 2D

La dimensión del gradiente mimético discreto en 2D, depende naturalmente, al igual que la divergencia, de su correspondiente unidimensional; es decir, para un operador con orden de aproximación k en todo el mallado y a objeto de evitar solapamiento, el número de celdas mínimo N , debe ser mayor o igual a $3k - 1$ ($N \geq 3k - 1$).

Para que el operador preserve el orden a lo largo de la componente en el eje X y la componente en el eje Y , es suficiente considerar un mallado cuadrado, que en el caso $k = 2$ se vio que es de 5×5 . Este mallado puede observarse en la figura 3.2 .

Si consideramos el campo escalar continuo $z = f(x, y)$ con discretización *celda-valuada* $\mathbf{f}$. Para el mallado anterior, el rango de $\mathbf{f}$ es un vector columna en $\mathbb{R}^{25 \times 1}$, como se describe a continuación:

$$\mathbf{f} = \left((3/2, 3/2) (5/2, 3/2) \cdots (11/2, 3/2) (3/2, 5/2) \cdots (9/2, 11/2) (11/2, 11/2) \cdots (11/2, 6) \right)^T \quad (3.1.9)$$

Puesto que el gradiente debe ser calculado en los nodos frontera con aproximación de la derivada hacia adelante (frontera izquierda e inferior) y aproximación de la derivada hacia atrás (frontera derecha y superior), $\mathbf{f}$ debe ser extendida para incorporársele estos nodos, de tal forma que $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{45 \times 1}$.

$$\hat{\mathbf{f}} = \left((3/2, 1) (5/2, 1) \cdots (11/2, 1) (1, 3/2) (3/2, 3/2) \cdots (6, 11/2) (3/2, 6) \cdots (11/2, 6) \right)^T \quad (3.1.10)$$

Para estructurar $\mathbf{f}$ y $\hat{\mathbf{f}}$, se ha seguido un recorrido en el mallado de izquierda a derecha y fila a fila, comenzando en los nodos de la frontera inferior para $\hat{\mathbf{f}}$ (ver figura 3.4).

Como el gradiente continuo es: $\nabla f = f_x e_1 + f_y e_2$, su análogo discreto será definido como:

$$\mathcal{G}\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}_x e_1 + \hat{\mathbf{f}}_y e_2 \quad (3.1.11)$$

Luego $\hat{\mathbf{f}}$ determina las columnas para $\mathcal{G}$. Para el caso $k = 2$ se tienen 45 columnas.

El número de filas de $\mathcal{G}$ se corresponde con los nodos en donde éste debe ser calculado. Para $k = 2$ estos nodos son 60; es decir, $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{60 \times 45}$.

En general, si el mallado es rectangular, con M celdas a lo largo del eje X y N celdas a lo largo del eje Y , el gradiente es de dimensión: $(2NM + N + M) \times (NM + 2N + 2M)$ (fórmula centrada con orden de aproximación $k = 2$).

El operador gradiente mimético bidimensional mostrará una estructura en bloques, donde la componente en X está dada por el gradiente unidimensional 2-2-2 en 1D,

es decir:

$$\mathcal{G}_x = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}_{6 \times 7} \quad (3.1.12)$$

Dada la dificultad de presentar los bloques matriciales correspondientes a la componente a lo largo del eje Y , sólo se presentarán las entradas no nulas de cada uno de dichos bloques $\mathcal{G}_{y_j}$ con $j = 1, \dots, 5$. Además, para efectos de programar y hacer los cálculos, es suficiente proporcionar esta información (ver Apéndice E).

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_1}$

$$\begin{array}{llll} g_{1,1}^1 = -\frac{8}{3} & g_{1,7}^1 = 3 & g_{1,14}^1 = -\frac{1}{3} & g_{2,7}^1 = -1 \\ g_{2,14}^1 = 1 & g_{3,14}^1 = -1 & g_{3,21}^1 = 1 & g_{4,21}^1 = -1 \\ g_{4,28}^1 = 1 & g_{5,28}^1 = -1 & g_{5,35}^1 = 1 & g_{6,28}^1 = \frac{1}{3} \\ & g_{6,35}^1 = -3 & g_{6,41}^1 = \frac{8}{3} & \end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_2}$

$$\begin{array}{llll} g_{1,2}^2 = -\frac{8}{3} & g_{1,8}^2 = 3 & g_{1,15}^2 = -\frac{1}{3} & g_{2,8}^2 = -1 \\ g_{2,15}^2 = 1 & g_{3,15}^2 = -1 & g_{3,22}^2 = 1 & g_{4,22}^2 = -1 \\ g_{4,29}^2 = 1 & g_{5,29}^2 = -1 & g_{5,36}^2 = 1 & g_{6,29}^2 = \frac{1}{3} \\ & g_{6,36}^2 = -3 & g_{6,42}^2 = \frac{8}{3} & \end{array}$$

en donde $O^{6 \times 5}$ es una matriz nula de dimensión 6×5 .

En el caso del operador gradiente de orden 2 mostrado anteriormente, el número de elementos no nulos es de 140, representando un 5,18 % del total de 2700 elementos.

Fórmulas de Aproximación de la Derivada

A continuación se muestran las fórmulas de aproximación de la derivada dado el operador gradiente mimético bidimensional de orden $k = 2$, tanto en el interior del mallado como en la frontera.

Nodos Interiores

$$\mathcal{G}_x\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(i - \frac{1}{2}\right)^n - \left(i - \frac{3}{2}\right)^n\right) h_x^{n-1} \quad ; \quad i = 2, \dots, N \quad y \quad j = 1, \dots, M$$

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right) = \left(\left(j - \frac{1}{2}\right)^n - \left(j - \frac{3}{2}\right)^n\right) h_y^{n-1} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad y \quad j = 2, \dots, M$$

En la figura 3.5 se muestran en color rojo los nodos denominados *nodos interiores*.

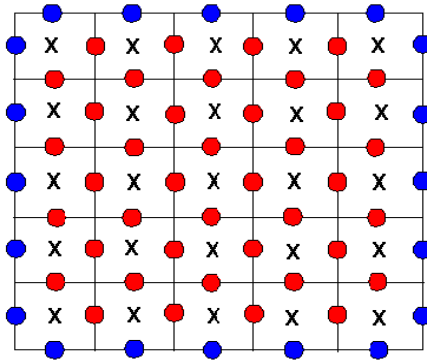


Figura 3.5: Nodos Interiores

Nodos de Frontera Izquierda

$$\mathcal{G}_x\left(x_1, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{3-3^{n-1}}{2^n}\right)h_x^{n-1} \quad ; \quad j = 1, \dots, M$$

En la figura 3.6 se muestran en color rojo los nodos a que hace referencia la fórmula anterior.

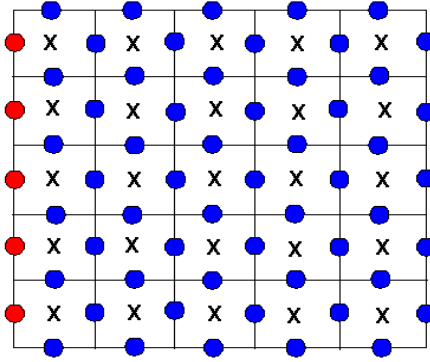


Figura 3.6: Nodos Frontera Izquierda

Nodos de Frontera Derecha

$$\mathcal{G}_x\left(x_{N+1}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{3}\left(N - \frac{3}{2}\right)^n - 3\left(N - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3}N^n\right)h_x^{n-1} \quad ; \quad j = 1, \dots, M$$

En la figura 3.7 se muestran en color rojo los nodos a que hace referencia la fórmula anterior.

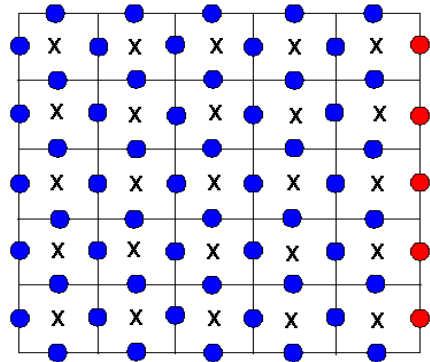


Figura 3.7: Nodos Frontera Derecha

Nodos de Frontera Inferior

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_1\right) = \left(\frac{3-3^{n-1}}{2^n}\right)h_y^{n-1} \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

En la figura 3.8 se muestran en color rojo los nodos a que hace referencia la fórmula anterior.

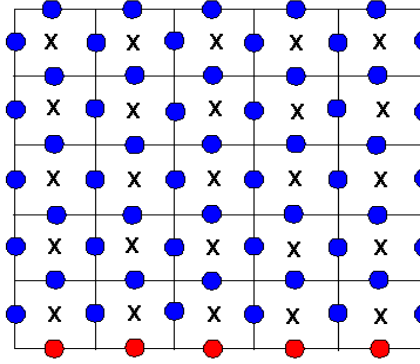


Figura 3.8: Nodos Frontera Inferior

Nodos de Frontera Superior

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{M+1}\right) = \left(\frac{1}{3}\left(M - \frac{3}{2}\right)^n - 3\left(M - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3}M^n\right)h_y^{n-1} \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

En la figura 3.9 se muestran en color rojo los nodos a que hace referencia la fórmula anterior.

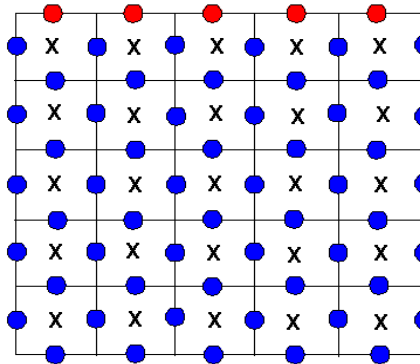
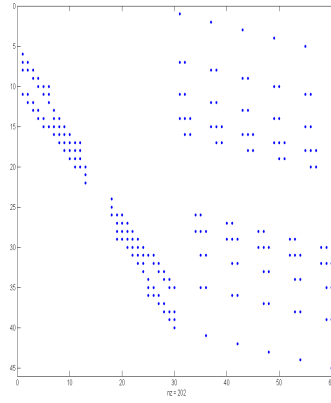


Figura 3.9: Nodos Frontera Superior

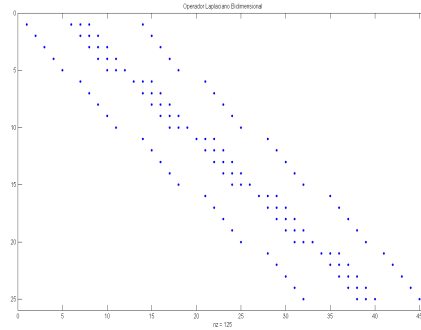
3.1.3. Operador de Frontera

El cálculo de el operador de frontera $\mathbf{B}$, que se debe obtener para ser usado en la discretización a objeto de que se satisfaga el teorema de la divergencia generalizada ($\langle \widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle_Q + \langle \mathcal{G}^t(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{f}} \rangle_P = \langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{f}} \rangle$) es análogo al caso unidimensional (ver *Apéndice I*). Puesto que no es posible mostrar dicho operador explícitamente dada la dimensión del mismo (45×60), a continuación se presentará sólo su estructura:



3.1.4. Operador Laplaciano

Como ya se mencionó en el caso unidimensional, el cálculo del operador laplaciano discreto es muy sencillo, ya que sólo es necesario efectuar el producto matricial entre la divergencia y el gradiente. Los resultados de dicha operación pueden verse con detalle ejecutando el código en Matlab (ver *Apéndice I*) dada la imposibilidad de presentarlos aquí por su dimensión (25×45); sin embargo, a continuación se mostrará la estructura del mismo:



3.2. Operadores Diferenciales Discretos Miméticos de Cuarto Orden en $2D$

3.2.1. Divergencia Mimética de Cuarto Orden

Análogo a como se hizo para obtener el operador diferencial divergencia mimético de segundo orden en $2D$, a efectos de calcular el operador de divergencia discreto mimético de orden 4-4-4 en $2D$, es suficiente considerar un mallado tensorial uniforme cuadrado con once celdas a lo largo del eje X y once celdas a lo largo del eje Y . Ya antes se mencionó que es suficiente con cumplir con la condición $N \geq 3k - 1$, así, el mallado mínimo a utilizar, tal que se satisfagan las condiciones de orden deseadas tiene dimensión $N \times N$.

Para este caso (4-4-4) y con el mallado mínimo seleccionado (11×11), $\mathcal{D}$ posee once bloques tanto de $\mathcal{D}_x$ como de $\mathcal{D}_y$. Los bloques $\mathcal{D}_x$ toman la forma que sigue:

$$\mathcal{D}_x = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{15576} & -\frac{129}{2596} & \frac{1165}{5192} & -\frac{6091}{15576} & -\frac{909}{1298} & \frac{4751}{5192} \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{D}_x \in \mathbb{R}^{11 \times 12}$.

Estos once bloques $\mathcal{D}_x$ aportan 132 columnas a la matriz $\mathcal{D}$ y naturalmente sus 121 filas. Las restantes columnas son aportadas por los bloques correspondientes a $\mathcal{D}_y$, así $\mathcal{D}_y \in \mathbb{R}^{121 \times 132}$.

Los bloques $\mathcal{D}_y$ tienen entradas no nulas como se muestra a continuación:

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_1}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{1,1}^1 = -\frac{4751}{5192} & d_{1,2}^1 = \frac{909}{1298} & d_{1,3}^1 = \frac{6091}{15576} & d_{1,4}^1 = -\frac{1165}{5192} & d_{1,5}^1 = \frac{129}{2596} \\
d_{1,6}^1 = -\frac{25}{1576} & d_{12,1}^1 = \frac{1}{24} & d_{12,2}^1 = -\frac{9}{8} & d_{12,3}^1 = \frac{9}{8} & d_{12,4}^1 = -\frac{1}{24} \\
d_{23,2}^1 = \frac{1}{24} & d_{23,3}^1 = -\frac{9}{8} & d_{23,4}^1 = \frac{9}{8} & d_{23,5}^1 = -\frac{1}{24} & d_{34,3}^1 = \frac{1}{24} \\
d_{34,4}^1 = -\frac{9}{8} & d_{34,5}^1 = \frac{9}{8} & d_{34,6}^1 = -\frac{1}{24} & d_{45,4}^1 = \frac{1}{24} & d_{45,5}^1 = -\frac{9}{8} \\
d_{45,6}^1 = \frac{9}{8} & d_{45,7}^1 = -\frac{1}{24} & d_{56,5}^1 = \frac{1}{24} & d_{56,6}^1 = -\frac{9}{8} & d_{56,7}^1 = \frac{9}{8} \\
d_{56,8}^1 = -\frac{1}{24} & d_{67,6}^1 = \frac{1}{24} & d_{67,7}^1 = -\frac{9}{8} & d_{67,8}^1 = \frac{9}{8} & d_{67,9}^1 = -\frac{1}{24} \\
d_{78,7}^1 = \frac{1}{24} & d_{78,8}^1 = -\frac{9}{8} & d_{78,9}^1 = \frac{9}{8} & d_{78,10}^1 = -\frac{1}{24} & d_{89,8}^1 = \frac{1}{24} \\
d_{89,9}^1 = -\frac{9}{8} & d_{89,10}^1 = \frac{9}{8} & d_{89,11}^1 = -\frac{1}{24} & d_{100,9}^1 = \frac{1}{24} & d_{100,10}^1 = -\frac{9}{8} \\
d_{100,11}^1 = \frac{9}{8} & d_{100,12}^1 = -\frac{1}{24} & d_{111,7}^1 = \frac{25}{15576} & d_{111,8}^1 = -\frac{129}{2596} & d_{111,9}^1 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{111,10}^1 = -\frac{6091}{15576} & d_{111,11}^1 = -\frac{909}{1298} & d_{111,12}^1 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_2}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{2,1}^2 = -\frac{4751}{5192} & d_{2,2}^2 = \frac{909}{1298} & d_{2,3}^2 = \frac{6091}{15576} & d_{2,4}^2 = -\frac{1165}{5192} & d_{2,5}^2 = \frac{129}{2596} \\
d_{2,6}^2 = -\frac{25}{1576} & d_{13,1}^2 = \frac{1}{24} & d_{13,2}^2 = -\frac{9}{8} & d_{13,3}^2 = \frac{9}{8} & d_{13,4}^2 = -\frac{1}{24} \\
d_{24,2}^2 = \frac{1}{24} & d_{24,3}^2 = -\frac{9}{8} & d_{24,4}^2 = \frac{9}{8} & d_{24,5}^2 = -\frac{1}{24} & d_{35,3}^2 = \frac{1}{24} \\
d_{35,4}^2 = -\frac{9}{8} & d_{35,5}^2 = \frac{9}{8} & d_{35,6}^2 = -\frac{1}{24} & d_{46,4}^2 = \frac{1}{24} & d_{46,5}^2 = -\frac{9}{8} \\
d_{46,6}^2 = \frac{9}{8} & d_{46,7}^2 = -\frac{1}{24} & d_{57,5}^2 = \frac{1}{24} & d_{57,6}^2 = -\frac{9}{8} & d_{57,7}^2 = \frac{9}{8} \\
d_{57,8}^2 = -\frac{1}{24} & d_{68,6}^2 = \frac{1}{24} & d_{68,7}^2 = -\frac{9}{8} & d_{68,8}^2 = \frac{9}{8} & d_{68,9}^2 = -\frac{1}{24} \\
d_{79,7}^2 = \frac{1}{24} & d_{79,8}^2 = -\frac{9}{8} & d_{79,9}^2 = \frac{9}{8} & d_{79,10}^2 = -\frac{1}{24} & d_{90,8}^2 = \frac{1}{24} \\
d_{90,9}^2 = -\frac{9}{8} & d_{90,10}^2 = \frac{9}{8} & d_{90,11}^2 = -\frac{1}{24} & d_{101,9}^2 = \frac{1}{24} & d_{101,10}^2 = -\frac{9}{8} \\
d_{101,11}^2 = \frac{9}{8} & d_{101,12}^2 = -\frac{1}{24} & d_{112,7}^2 = \frac{25}{15576} & d_{112,8}^2 = -\frac{129}{2596} & d_{112,9}^2 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{112,10}^2 = -\frac{6091}{15576} & d_{112,11}^2 = -\frac{909}{1298} & d_{112,12}^2 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_3}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{3,1}^3 = -\frac{4751}{5192} & d_{3,2}^3 = \frac{909}{1298} & d_{3,3}^3 = \frac{6091}{15576} & d_{3,4}^3 = -\frac{1165}{5192} & d_{3,5}^3 = \frac{129}{2596} \\
d_{3,6}^3 = -\frac{25}{1576} & d_{14,1}^3 = \frac{1}{24} & d_{14,2}^3 = -\frac{9}{8} & d_{14,3}^3 = \frac{9}{8} & d_{14,4}^3 = -\frac{1}{24} \\
d_{25,2}^3 = \frac{1}{24} & d_{25,3}^3 = -\frac{9}{8} & d_{25,4}^3 = \frac{9}{8} & d_{25,5}^3 = -\frac{1}{24} & d_{36,3}^3 = \frac{1}{24} \\
d_{36,4}^3 = -\frac{9}{8} & d_{36,5}^3 = \frac{9}{8} & d_{36,6}^3 = -\frac{1}{24} & d_{47,4}^3 = \frac{1}{24} & d_{47,5}^3 = -\frac{9}{8} \\
d_{47,6}^3 = \frac{9}{8} & d_{47,7}^3 = -\frac{1}{24} & d_{58,5}^3 = \frac{1}{24} & d_{58,6}^3 = -\frac{9}{8} & d_{58,7}^3 = \frac{9}{8} \\
d_{58,8}^3 = -\frac{1}{24} & d_{69,6}^3 = \frac{1}{24} & d_{69,7}^3 = -\frac{9}{8} & d_{69,8}^3 = \frac{9}{8} & d_{69,9}^3 = -\frac{1}{24} \\
d_{80,7}^3 = \frac{1}{24} & d_{80,8}^3 = -\frac{9}{8} & d_{80,9}^3 = \frac{9}{8} & d_{80,10}^3 = -\frac{1}{24} & d_{91,8}^3 = \frac{1}{24} \\
d_{91,9}^3 = -\frac{9}{8} & d_{91,10}^3 = \frac{9}{8} & d_{91,11}^3 = -\frac{1}{24} & d_{102,9}^3 = \frac{1}{24} & d_{102,10}^3 = -\frac{9}{8} \\
d_{102,11}^3 = \frac{9}{8} & d_{102,12}^3 = -\frac{1}{24} & d_{113,7}^3 = \frac{25}{15576} & d_{113,8}^3 = -\frac{129}{2596} & d_{113,9}^3 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{113,10}^3 = -\frac{6091}{15576} & d_{113,11}^3 = -\frac{909}{1298} & d_{113,12}^3 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_4}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{4,1}^4 = -\frac{4751}{5192} & d_{4,2}^4 = \frac{909}{1298} & d_{4,3}^4 = \frac{6091}{15576} & d_{4,4}^4 = -\frac{1165}{5192} & d_{4,5}^4 = \frac{129}{2596} \\
d_{4,6}^4 = -\frac{25}{1576} & d_{15,1}^4 = \frac{1}{24} & d_{15,2}^4 = -\frac{9}{8} & d_{15,3}^4 = \frac{9}{8} & d_{15,4}^4 = -\frac{1}{24} \\
d_{26,2}^4 = \frac{1}{24} & d_{26,3}^4 = -\frac{9}{8} & d_{26,4}^4 = \frac{9}{8} & d_{26,5}^4 = -\frac{1}{24} & d_{37,3}^4 = \frac{1}{24} \\
d_{37,4}^4 = -\frac{9}{8} & d_{37,5}^4 = \frac{9}{8} & d_{37,6}^4 = -\frac{1}{24} & d_{48,4}^4 = \frac{1}{24} & d_{48,5}^4 = -\frac{9}{8} \\
d_{48,6}^4 = \frac{9}{8} & d_{48,7}^4 = -\frac{1}{24} & d_{59,5}^4 = \frac{1}{24} & d_{59,6}^4 = -\frac{9}{8} & d_{59,7}^4 = \frac{9}{8} \\
d_{59,8}^4 = -\frac{1}{24} & d_{70,6}^4 = \frac{1}{24} & d_{70,7}^4 = -\frac{9}{8} & d_{70,8}^4 = \frac{9}{8} & d_{70,9}^4 = -\frac{1}{24} \\
d_{81,7}^4 = \frac{1}{24} & d_{81,8}^4 = -\frac{9}{8} & d_{81,9}^4 = \frac{9}{8} & d_{81,10}^4 = -\frac{1}{24} & d_{92,8}^4 = \frac{1}{24} \\
d_{92,9}^4 = -\frac{9}{8} & d_{92,10}^4 = \frac{9}{8} & d_{92,11}^4 = -\frac{1}{24} & d_{103,9}^4 = \frac{1}{24} & d_{103,10}^4 = -\frac{9}{8} \\
d_{103,11}^4 = \frac{9}{8} & d_{103,12}^4 = -\frac{1}{24} & d_{114,7}^4 = \frac{25}{15576} & d_{114,8}^4 = -\frac{129}{2596} & d_{114,9}^4 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{114,10}^4 = -\frac{6091}{15576} & d_{114,11}^4 = -\frac{909}{1298} & d_{114,12}^4 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_5}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{5,1}^5 = -\frac{4751}{5192} & d_{5,2}^5 = \frac{909}{1298} & d_{5,3}^5 = \frac{6091}{15576} & d_{5,4}^5 = -\frac{1165}{5192} & d_{5,5}^5 = \frac{129}{2596} \\
d_{5,6}^5 = -\frac{25}{1576} & d_{16,1}^5 = \frac{1}{24} & d_{16,2}^5 = -\frac{9}{8} & d_{16,3}^5 = \frac{9}{8} & d_{16,4}^5 = -\frac{1}{24} \\
d_{27,2}^5 = \frac{1}{24} & d_{27,3}^5 = -\frac{9}{8} & d_{27,4}^5 = \frac{9}{8} & d_{27,5}^5 = -\frac{1}{24} & d_{38,3}^5 = \frac{1}{24} \\
d_{38,4}^5 = -\frac{9}{8} & d_{38,5}^5 = \frac{9}{8} & d_{38,6}^5 = -\frac{1}{24} & d_{49,4}^5 = \frac{1}{24} & d_{49,5}^5 = -\frac{9}{8} \\
d_{49,6}^5 = \frac{9}{8} & d_{49,7}^5 = -\frac{1}{24} & d_{60,5}^5 = \frac{1}{24} & d_{60,6}^5 = -\frac{9}{8} & d_{60,7}^5 = \frac{9}{8} \\
d_{60,8}^5 = -\frac{1}{24} & d_{71,6}^5 = \frac{1}{24} & d_{71,7}^5 = -\frac{9}{8} & d_{71,8}^5 = \frac{9}{8} & d_{71,9}^5 = -\frac{1}{24} \\
d_{82,7}^5 = \frac{1}{24} & d_{82,8}^5 = -\frac{9}{8} & d_{82,9}^5 = \frac{9}{8} & d_{82,10}^5 = -\frac{1}{24} & d_{93,8}^5 = \frac{1}{24} \\
d_{93,9}^5 = -\frac{9}{8} & d_{93,10}^5 = \frac{9}{8} & d_{93,11}^5 = -\frac{1}{24} & d_{104,9}^5 = \frac{1}{24} & d_{104,10}^5 = -\frac{9}{8} \\
d_{104,11}^5 = \frac{9}{8} & d_{104,12}^5 = -\frac{1}{24} & d_{115,7}^5 = \frac{25}{15576} & d_{115,8}^5 = -\frac{129}{2596} & d_{115,9}^5 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{115,10}^5 = -\frac{6091}{15576} & d_{115,11}^5 = -\frac{909}{1298} & d_{115,12}^5 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_6}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{6,1}^6 = -\frac{4751}{5192} & d_{6,2}^6 = \frac{909}{1298} & d_{6,3}^6 = \frac{6091}{15576} & d_{6,4}^6 = -\frac{1165}{5192} & d_{6,5}^6 = \frac{129}{2596} \\
d_{6,6}^6 = -\frac{25}{1576} & d_{17,1}^6 = \frac{1}{24} & d_{17,2}^6 = -\frac{9}{8} & d_{17,3}^6 = \frac{9}{8} & d_{17,4}^6 = -\frac{1}{24} \\
d_{28,2}^6 = \frac{1}{24} & d_{28,3}^6 = -\frac{9}{8} & d_{28,4}^6 = \frac{9}{8} & d_{28,5}^6 = -\frac{1}{24} & d_{39,3}^6 = \frac{1}{24} \\
d_{39,4}^6 = -\frac{9}{8} & d_{39,5}^6 = \frac{9}{8} & d_{39,6}^6 = -\frac{1}{24} & d_{50,4}^6 = \frac{1}{24} & d_{50,5}^6 = -\frac{9}{8} \\
d_{50,6}^6 = \frac{9}{8} & d_{50,7}^6 = -\frac{1}{24} & d_{61,5}^6 = \frac{1}{24} & d_{61,6}^6 = -\frac{9}{8} & d_{61,7}^6 = \frac{9}{8} \\
d_{61,8}^6 = -\frac{1}{24} & d_{72,6}^6 = \frac{1}{24} & d_{72,7}^6 = -\frac{9}{8} & d_{72,8}^6 = \frac{9}{8} & d_{72,9}^6 = -\frac{1}{24} \\
d_{83,7}^6 = \frac{1}{24} & d_{83,8}^6 = -\frac{9}{8} & d_{83,9}^6 = \frac{9}{8} & d_{83,10}^6 = -\frac{1}{24} & d_{94,8}^6 = \frac{1}{24} \\
d_{94,9}^6 = -\frac{9}{8} & d_{94,10}^6 = \frac{9}{8} & d_{94,11}^6 = -\frac{1}{24} & d_{105,9}^6 = \frac{1}{24} & d_{105,10}^6 = -\frac{9}{8} \\
d_{105,11}^6 = \frac{9}{8} & d_{105,12}^6 = -\frac{1}{24} & d_{116,7}^6 = \frac{25}{15576} & d_{116,8}^6 = -\frac{129}{2596} & d_{116,9}^6 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{116,10}^6 = -\frac{6091}{15576} & d_{116,11}^6 = -\frac{909}{1298} & d_{116,12}^6 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y7}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{7,1}^7 = -\frac{4751}{5192} & d_{7,2}^7 = \frac{909}{1298} & d_{7,3}^7 = \frac{6091}{15576} & d_{7,4}^7 = -\frac{1165}{5192} & d_{7,5}^7 = \frac{129}{2596} \\
d_{7,6}^7 = -\frac{25}{1576} & d_{18,1}^7 = \frac{1}{24} & d_{18,2}^7 = -\frac{9}{8} & d_{18,3}^7 = \frac{9}{8} & d_{18,4}^7 = -\frac{1}{24} \\
d_{29,2}^7 = \frac{1}{24} & d_{29,3}^7 = -\frac{9}{8} & d_{29,4}^7 = \frac{9}{8} & d_{29,5}^7 = -\frac{1}{24} & d_{40,3}^7 = \frac{1}{24} \\
d_{40,4}^7 = -\frac{9}{8} & d_{40,5}^7 = \frac{9}{8} & d_{40,6}^7 = -\frac{1}{24} & d_{51,4}^7 = \frac{1}{24} & d_{51,5}^7 = -\frac{9}{8} \\
d_{51,6}^7 = \frac{9}{8} & d_{51,7}^7 = -\frac{1}{24} & d_{62,5}^7 = \frac{1}{24} & d_{62,6}^7 = -\frac{9}{8} & d_{62,7}^7 = \frac{9}{8} \\
d_{62,8}^7 = -\frac{1}{24} & d_{73,6}^7 = \frac{1}{24} & d_{73,7}^7 = -\frac{9}{8} & d_{73,8}^7 = \frac{9}{8} & d_{73,9}^7 = -\frac{1}{24} \\
d_{84,7}^7 = \frac{1}{24} & d_{84,8}^7 = -\frac{9}{8} & d_{84,9}^7 = \frac{9}{8} & d_{84,10}^7 = -\frac{1}{24} & d_{95,8}^7 = \frac{1}{24} \\
d_{95,9}^7 = -\frac{9}{8} & d_{95,10}^7 = \frac{9}{8} & d_{95,11}^7 = -\frac{1}{24} & d_{106,9}^7 = \frac{1}{24} & d_{106,10}^7 = -\frac{9}{8} \\
d_{106,11}^7 = \frac{9}{8} & d_{106,12}^7 = -\frac{1}{24} & d_{117,7}^7 = \frac{25}{15576} & d_{117,8}^7 = -\frac{129}{2596} & d_{117,9}^7 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{117,10}^7 = -\frac{6091}{15576} & d_{117,11}^7 = -\frac{909}{1298} & d_{117,12}^7 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y8}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{8,1}^8 = -\frac{4751}{5192} & d_{8,2}^8 = \frac{909}{1298} & d_{8,3}^8 = \frac{6091}{15576} & d_{8,4}^8 = -\frac{1165}{5192} & d_{8,5}^8 = \frac{129}{2596} \\
d_{8,6}^8 = -\frac{25}{1576} & d_{19,1}^8 = \frac{1}{24} & d_{19,2}^8 = -\frac{9}{8} & d_{19,3}^8 = \frac{9}{8} & d_{19,4}^8 = -\frac{1}{24} \\
d_{30,2}^8 = \frac{1}{24} & d_{30,3}^8 = -\frac{9}{8} & d_{30,4}^8 = \frac{9}{8} & d_{30,5}^8 = -\frac{1}{24} & d_{41,3}^8 = \frac{1}{24} \\
d_{41,4}^8 = -\frac{9}{8} & d_{41,5}^8 = \frac{9}{8} & d_{41,6}^8 = -\frac{1}{24} & d_{52,4}^8 = \frac{1}{24} & d_{52,5}^8 = -\frac{9}{8} \\
d_{52,6}^8 = \frac{9}{8} & d_{52,7}^8 = -\frac{1}{24} & d_{63,5}^8 = \frac{1}{24} & d_{63,6}^8 = -\frac{9}{8} & d_{63,7}^8 = \frac{9}{8} \\
d_{63,8}^8 = -\frac{1}{24} & d_{74,6}^8 = \frac{1}{24} & d_{74,7}^8 = -\frac{9}{8} & d_{74,8}^8 = \frac{9}{8} & d_{74,9}^8 = -\frac{1}{24} \\
d_{85,7}^8 = \frac{1}{24} & d_{85,8}^8 = -\frac{9}{8} & d_{85,9}^8 = \frac{9}{8} & d_{85,10}^8 = -\frac{1}{24} & d_{96,8}^8 = \frac{1}{24} \\
d_{96,9}^8 = -\frac{9}{8} & d_{96,10}^8 = \frac{9}{8} & d_{97,11}^8 = -\frac{1}{24} & d_{107,9}^8 = \frac{1}{24} & d_{107,10}^8 = -\frac{9}{8} \\
d_{107,11}^8 = \frac{9}{8} & d_{107,12}^8 = -\frac{1}{24} & d_{118,7}^8 = \frac{25}{15576} & d_{118,8}^8 = -\frac{129}{2596} & d_{118,9}^8 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{118,10}^8 = -\frac{6091}{15576} & d_{118,11}^8 = -\frac{909}{1298} & d_{118,12}^8 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_9}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{9,1}^9 = -\frac{4751}{5192} & d_{9,2}^9 = \frac{909}{1298} & d_{9,3}^9 = \frac{6091}{15576} & d_{9,4}^9 = -\frac{1165}{5192} & d_{9,5}^9 = \frac{129}{2596} \\
d_{9,6}^9 = -\frac{25}{1576} & d_{20,1}^9 = \frac{1}{24} & d_{20,2}^9 = -\frac{9}{8} & d_{20,3}^9 = \frac{9}{8} & d_{20,4}^9 = -\frac{1}{24} \\
d_{31,2}^9 = \frac{1}{24} & d_{31,3}^9 = -\frac{9}{8} & d_{31,4}^9 = \frac{9}{8} & d_{31,5}^9 = -\frac{1}{24} & d_{42,3}^9 = \frac{1}{24} \\
d_{42,4}^9 = -\frac{9}{8} & d_{42,5}^9 = \frac{9}{8} & d_{42,6}^9 = -\frac{1}{24} & d_{53,4}^9 = \frac{1}{24} & d_{53,5}^9 = -\frac{9}{8} \\
d_{53,6}^9 = \frac{9}{8} & d_{53,7}^9 = -\frac{1}{24} & d_{64,5}^9 = \frac{1}{24} & d_{64,6}^9 = -\frac{9}{8} & d_{64,7}^9 = \frac{9}{8} \\
d_{64,8}^9 = -\frac{1}{24} & d_{75,6}^9 = \frac{1}{24} & d_{75,7}^9 = -\frac{9}{8} & d_{75,8}^9 = \frac{9}{8} & d_{75,9}^9 = -\frac{1}{24} \\
d_{86,7}^9 = \frac{1}{24} & d_{86,8}^9 = -\frac{9}{8} & d_{86,9}^9 = \frac{9}{8} & d_{86,10}^9 = -\frac{1}{24} & d_{97,8}^9 = \frac{1}{24} \\
d_{97,9}^9 = -\frac{9}{8} & d_{97,10}^9 = \frac{9}{8} & d_{98,11}^9 = -\frac{1}{24} & d_{108,9}^9 = \frac{1}{24} & d_{108,10}^9 = -\frac{9}{8} \\
d_{108,11}^9 = \frac{9}{8} & d_{108,12}^9 = -\frac{1}{24} & d_{119,7}^9 = \frac{25}{15576} & d_{119,8}^9 = -\frac{129}{2596} & d_{119,9}^9 = \frac{1165}{5192} \\
& d_{119,10}^9 = -\frac{6091}{15576} & d_{119,11}^9 = -\frac{909}{1298} & d_{119,12}^9 = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_{10}}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{10,1}^{10} = -\frac{4751}{5192} & d_{10,2}^{10} = \frac{909}{1298} & d_{10,3}^{10} = \frac{6091}{15576} & d_{10,4}^{10} = -\frac{1165}{5192} & d_{10,5}^{10} = \frac{129}{2596} \\
d_{10,6}^{10} = -\frac{25}{1576} & d_{21,1}^{10} = \frac{1}{24} & d_{21,2}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{21,3}^{10} = \frac{9}{8} & d_{21,4}^{10} = -\frac{1}{24} \\
d_{32,2}^{10} = \frac{1}{24} & d_{32,3}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{32,4}^{10} = \frac{9}{8} & d_{32,5}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{43,3}^{10} = \frac{1}{24} \\
d_{43,4}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{43,5}^{10} = \frac{9}{8} & d_{43,6}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{54,4}^{10} = \frac{1}{24} & d_{54,5}^{10} = -\frac{9}{8} \\
d_{54,6}^{10} = \frac{9}{8} & d_{54,7}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{65,5}^{10} = \frac{1}{24} & d_{65,6}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{65,7}^{10} = \frac{9}{8} \\
d_{65,8}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{76,6}^{10} = \frac{1}{24} & d_{76,7}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{76,8}^{10} = \frac{9}{8} & d_{76,9}^{10} = -\frac{1}{24} \\
d_{87,7}^{10} = \frac{1}{24} & d_{87,8}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{87,9}^{10} = \frac{9}{8} & d_{87,10}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{98,8}^{10} = \frac{1}{24} \\
d_{98,9}^{10} = -\frac{9}{8} & d_{98,10}^{10} = \frac{9}{8} & d_{99,11}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{109,9}^{10} = \frac{1}{24} & d_{109,10}^{10} = -\frac{9}{8} \\
d_{109,11}^{10} = \frac{9}{8} & d_{109,12}^{10} = -\frac{1}{24} & d_{120,7}^{10} = \frac{25}{15576} & d_{120,8}^{10} = -\frac{129}{2596} & d_{120,9}^{10} = \frac{1165}{5192} \\
& d_{120,10}^{10} = -\frac{6091}{15576} & d_{120,11}^{10} = -\frac{909}{1298} & d_{120,12}^{10} = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{D}_{y_{11}}$

$$\begin{array}{ccccc}
d_{11,1}^{11} = -\frac{4751}{5192} & d_{11,2}^{11} = \frac{909}{1298} & d_{11,3}^{11} = \frac{6091}{15576} & d_{11,4}^{11} = -\frac{1165}{5192} & d_{11,5}^{11} = \frac{129}{2596} \\
d_{11,6}^{11} = -\frac{25}{1576} & d_{22,1}^{11} = \frac{1}{24} & d_{22,2}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{22,3}^{11} = \frac{9}{8} & d_{22,4}^{11} = -\frac{1}{24} \\
d_{33,2}^{11} = \frac{1}{24} & d_{33,3}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{33,4}^{11} = \frac{9}{8} & d_{33,5}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{44,3}^{11} = \frac{1}{24} \\
d_{44,4}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{44,5}^{11} = \frac{9}{8} & d_{44,6}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{55,4}^{11} = \frac{1}{24} & d_{55,5}^{11} = -\frac{9}{8} \\
d_{55,6}^{11} = \frac{9}{8} & d_{55,7}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{66,5}^{11} = \frac{1}{24} & d_{66,6}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{66,7}^{11} = \frac{9}{8} \\
d_{66,8}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{77,6}^{11} = \frac{1}{24} & d_{77,7}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{77,8}^{11} = \frac{9}{8} & d_{77,9}^{11} = -\frac{1}{24} \\
d_{88,7}^{11} = \frac{1}{24} & d_{88,8}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{88,9}^{11} = \frac{9}{8} & d_{88,10}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{99,8}^{11} = \frac{1}{24} \\
d_{99,9}^{11} = -\frac{9}{8} & d_{99,10}^{11} = \frac{9}{8} & d_{100,11}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{110,9}^{11} = \frac{1}{24} & d_{110,10}^{11} = -\frac{9}{8} \\
d_{110,11}^{11} = \frac{9}{8} & d_{110,12}^{11} = -\frac{1}{24} & d_{121,7}^{11} = \frac{25}{15576} & d_{121,8}^{11} = -\frac{129}{2596} & d_{121,9}^{11} = \frac{1165}{5192} \\
& d_{121,10}^{11} = -\frac{6091}{15576} & d_{121,11}^{11} = -\frac{909}{1298} & d_{121,12}^{11} = \frac{4751}{5192} &
\end{array}$$

Al igual como se hizo para los operadores de orden 2, veamos el porcentaje de elementos no nulos presente. En este caso, el Operador de Divergencia de orden 4 posee un total de 31944 elementos, de los cuales un 3,30 %, es decir, 1056 elementos, son no nulos. Nótese que en relación al Operador de Divergencia de orden 2, el número de elementos porcentualmente ha disminuido casi a la mitad.

Fórmulas de Aproximación de la Derivada

A continuación se muestran las fórmulas de aproximación de la derivada dado el operador de divergencia mimética bidimensional de orden $k = 4$.

Celdas interiores

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \left(\frac{1}{24}(i-1)^n - \frac{9}{8}i^n + \frac{9}{8}(i+1)^n - \frac{1}{24}(i+2)^n\right)h_x^{n-1} + \\
&+ \left(\frac{1}{24}(j-1)^n - \frac{9}{8}j^n + \frac{9}{8}(j+1)^n - \frac{1}{24}(j+2)^n\right)h_y^{n-1}
\end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, N-2$ y $j = 1, \dots, M-2$.

En la figura 3.10 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas denominadas *celdas interiores* a que hace referencia la fórmula anterior.

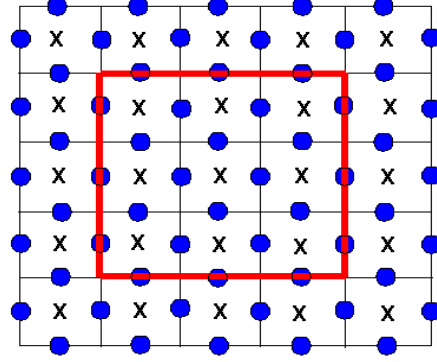


Figura 3.10: Celdas Interiores

Celdas de Frontera Izquierda No-Mixta

$$\mathcal{D}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{j+\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n \right) h_x^{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{1}{24}(j-1)^n - \frac{9}{8}j^n + \frac{9}{8}(j+1)^n - \frac{1}{24}(j+2)^n \right) h_y^{n-1}$$

con $j = 1, \dots, M-2$.

En la figura 3.11 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas a que hace referencia la fórmula anterior. Es necesario aclarar que se les denomina *celdas de frontera no mixta* dado que son frontera sólo con respecto a un eje coordenado (ver figura 3.11).

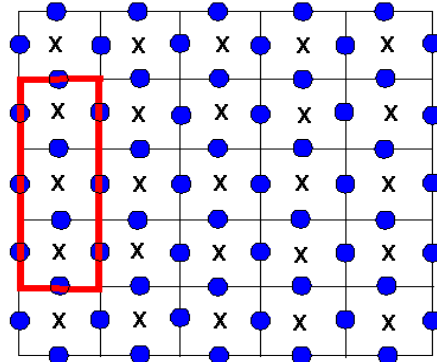


Figura 3.11: Celdas Frontera Izquierda No-Mixta

Celdas de Frontera Derecha No-Mixta

$$\mathcal{D}\left(x_{N+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{25}{15576}(N-5)^n - \frac{129}{2596}(N-4)^n + \frac{1165}{5192}(N-3)^n - \frac{6091}{15576}(N-2)^n - \frac{909}{1298}(N-1)^n + \frac{4751}{5192}N^n\right)h_x^{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{1}{24}(j-1)^n - \frac{9}{8}j^n + \frac{9}{8}(j+1)^n - \frac{1}{24}(j+2)^n\right)h_y^{n-1}$$

con $j = 1, \dots, M-2$.

En la figura 3.12 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas a que hace referencia la fórmula anterior.

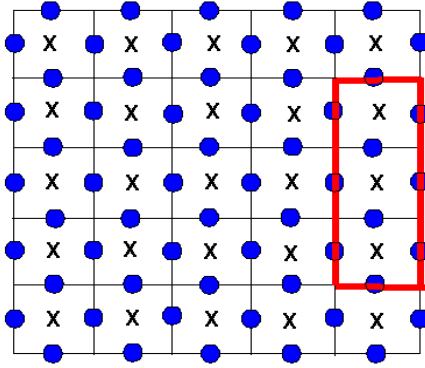


Figura 3.12: Celdas Frontera Derecha No-Mixta

Celdas de Frontera Inferior No-Mixta

$$\mathcal{D}\left(x_{i+\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{1}{24}(i-1)^n - \frac{9}{8}i^n + \frac{9}{8}(i+1)^n - \frac{1}{24}(i+2)^n\right)h_x^{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n\right)h_y^{n-1}$$

con $i = 1, \dots, N-2$.

En la figura 3.13 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas a que hace referencia la fórmula anterior.

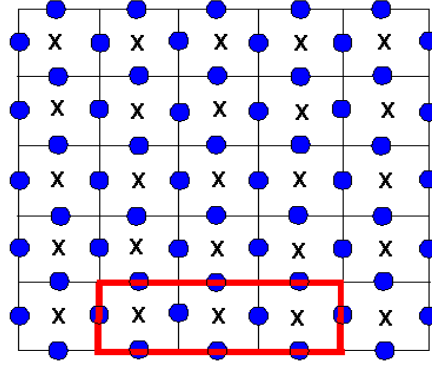


Figura 3.13: Celdas Frontera Inferior No-Mixta

Celdas de Frontera Superior No-Mixta

$$\mathcal{D}\left(x_{i+\frac{3}{2}}, y_{M+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{24}(i-1)^n - \frac{9}{8}i^n + \frac{9}{8}(i+1)^n - \frac{1}{24}(i+2)^n\right)h_x^{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{25}{15576}(M-5)^n - \frac{129}{2596}(M-4)^n + \frac{1165}{5192}(M-3)^n - \frac{6091}{15576}(M-2)^n - \frac{909}{1298}(M-1)^n + \frac{4751}{5192}M^n\right)h_y^{n-1}$$

con $i = 1, \dots, N-2$.

En la figura 3.14 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas a que hace referencia la fórmula anterior.

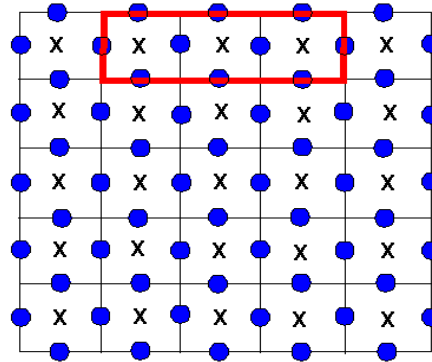


Figura 3.14: Celdas Frontera Superior No-Mixta

Celdas de Frontera Mixta

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n\right)h_x^{n-1} + \\
&+ \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n\right)h_y^{n-1} \\
\\
\mathcal{D}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{M+\frac{1}{2}}\right) &= \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n\right)h_x^{n-1} + \\
&+ \left(\frac{25}{15576}(M-4)^n - \frac{129}{2596}(M-3)^n + \frac{1165}{5192}(M-2)^n - \frac{6091}{15576}(M-1)^n - \frac{909}{1298}M^n + \frac{4751}{5192}(M+1)^n\right)h_y^{n-1} \\
\\
\mathcal{D}\left(x_{N+\frac{1}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(\frac{25}{15576}(N-4)^n - \frac{129}{2596}(N-3)^n + \frac{1165}{5192}(N-2)^n - \frac{6091}{15576}(N-1)^n - \frac{909}{1298}N^n + \frac{4751}{5192}(N+1)^n\right)h_x^{n-1} + \\
&+ \left(\frac{909}{1298} + \frac{6091}{15576}2^n - \frac{1165}{5192}3^n + \frac{129}{2596}4^n - \frac{25}{15576}5^n\right)h_y^{n-1} \\
\\
\mathcal{D}\left(x_{N+\frac{1}{2}}, y_{M+\frac{1}{2}}\right) &= \left(\frac{25}{15576}(N-4)^n - \frac{129}{2596}(N-3)^n + \frac{1165}{5192}(N-2)^n - \frac{6091}{15576}(N-1)^n - \frac{909}{1298}N^n + \frac{4751}{5192}(N+1)^n\right)h_x^{n-1} + \\
&+ \left(\frac{25}{15576}(M-4)^n - \frac{129}{2596}(M-3)^n + \frac{1165}{5192}(M-2)^n - \frac{6091}{15576}(M-1)^n - \frac{909}{1298}M^n + \frac{4751}{5192}(M+1)^n\right)h_y^{n-1}
\end{aligned}$$

En la figura 3.15 se muestran enmarcadas en color rojo el conjunto de celdas a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

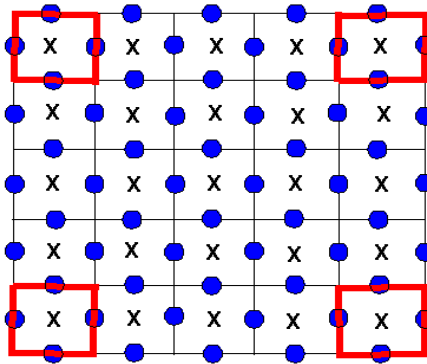


Figura 3.15: Celdas Frontera Mixta

3.2.2. Gradiente Mimético de Cuarto Orden

De forma análoga a como se hizo para obtener el operador diferencial gradiente mimético de segundo orden en $2D$, a efectos de calcular el operador diferencial gradiente mimético de orden $4-4-4$ en $2D$, es suficiente considerar un mallado tensorial uniforme cuadrado con once celdas a lo largo del eje X y once celdas a lo largo del eje Y ($N \geq 3k - 1$).

Con el mallado mínimo seleccionado (11×11), $\mathcal{G}$ posee once bloques tanto de $\mathcal{G}_x$ como de $\mathcal{G}_y$ siguiendo una estructura análoga a la presentada en (3.1.13). Los bloques $\mathcal{G}_x$ coinciden con el operador gradiente mimético de orden $4-4-4$ en $1D$. Su estructura se muestra a continuación:

$$\mathcal{G}(A) = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} -\frac{1152}{407} & \frac{10063}{3256} & \frac{2483}{9768} & -\frac{3309}{3256} & \frac{2099}{3256} & -\frac{697}{4884} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & 3/8 & -\frac{5}{24} & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/24 & \frac{5}{24} & -3/8 & -\frac{17}{24} & \frac{11}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{697}{4884} & -\frac{2099}{3256} & \frac{3309}{3256} & -\frac{2483}{9768} & -\frac{10063}{3256} & \frac{1152}{407} \end{pmatrix}_{12 \times 13}$$

Nuevamente, dada la dificultad de escribir los bloques del operador $\mathcal{G}_{264 \times 165}$, correspondientes a la componente en Y ($\mathcal{G}_y^{132 \times 165}$), al igual que se hizo para el operador de orden $2-2-2$, sólo se mostrarán los elementos no nulos pertenecientes a cada uno de los $\mathcal{G}_{y_j}$ con $j = 1 \dots 11$.

A continuación se muestran los elementos no nulos correspondientes a cada uno de los bloques que conforman $\mathcal{G}_y$ ($\mathcal{G}_{y_j}, j = 1, \dots, 11$). Todos los cálculos que se han

presentado y los que están por presentarse a continuación pueden verse con más detalle en el *Apéndice E*. Además, podrá observarse claramente la estructura de cada uno de los operadores descritos, mediante una implementación computacional en MatLab 7.0 que permite obtener los operadores de orden $k = 2$ y $k = 4$ para un N cualquiera ($N \geq 3k - 1$).

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_1}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,1}^1 = -\frac{1152}{407} & g_{1,13}^1 = \frac{10063}{3256} & g_{1,26}^1 = \frac{2483}{9768} & g_{1,39}^1 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,52}^1 = \frac{2099}{3256} & g_{1,65}^1 = -\frac{697}{4884} & g_{2,13}^1 = -\frac{11}{12} & g_{2,26}^1 = \frac{17}{24} \\
g_{2,39}^1 = -\frac{3}{8} & g_{2,52}^1 = -\frac{5}{24} & g_{2,65}^1 = \frac{1}{24} & g_{3,13}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{3,26}^1 = -\frac{9}{8} & g_{3,39}^1 = \frac{9}{8} & g_{3,52}^1 = -\frac{1}{24} & g_{4,26}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{4,39}^1 = -\frac{9}{8} & g_{4,52}^1 = \frac{9}{8} & g_{4,65}^1 = -\frac{1}{24} & g_{5,39}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{5,52}^1 = -\frac{9}{8} & g_{5,65}^1 = \frac{9}{8} & g_{5,78}^1 = -\frac{1}{24} & g_{6,52}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{6,65}^1 = -\frac{9}{8} & g_{6,78}^1 = \frac{9}{8} & g_{6,91}^1 = -\frac{1}{24} & g_{7,65}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{7,78}^1 = -\frac{9}{8} & g_{7,91}^1 = \frac{9}{8} & g_{7,104}^1 = -\frac{1}{24} & g_{8,78}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{8,91}^1 = -\frac{9}{8} & g_{8,104}^1 = \frac{9}{8} & g_{8,117}^1 = -\frac{1}{24} & g_{9,91}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{9,104}^1 = -\frac{9}{8} & g_{9,117}^1 = \frac{9}{8} & g_{9,130}^1 = -\frac{1}{24} & g_{10,104}^1 = \frac{1}{24} \\
g_{10,117}^1 = -\frac{9}{8} & g_{10,130}^1 = \frac{9}{8} & g_{10,143}^1 = -\frac{1}{24} & g_{11,91}^1 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,104}^1 = \frac{5}{24} & g_{11,117}^1 = -\frac{3}{8} & g_{11,130}^1 = -\frac{17}{24} & g_{11,143}^1 = \frac{11}{12} \\
g_{12,91}^1 = \frac{697}{4884} & g_{12,104}^1 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,117}^1 = \frac{3309}{3256} & g_{12,130}^1 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,143}^1 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,155}^1 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_2}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,2}^2 = -\frac{1152}{407} & g_{1,14}^2 = \frac{10063}{3256} & g_{1,27}^2 = \frac{2483}{9768} & g_{1,40}^2 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,53}^2 = \frac{2099}{3256} & g_{1,66}^2 = -\frac{697}{4884} & g_{2,14}^2 = -\frac{11}{12} & g_{2,27}^2 = \frac{17}{24} \\
g_{2,40}^2 = -\frac{3}{8} & g_{2,53}^2 = -\frac{5}{24} & g_{2,66}^2 = \frac{1}{24} & g_{3,14}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{3,27}^2 = -\frac{9}{8} & g_{3,40}^2 = \frac{9}{8} & g_{3,53}^2 = -\frac{1}{24} & g_{4,27}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{4,40}^2 = -\frac{9}{8} & g_{4,53}^2 = \frac{9}{8} & g_{4,66}^2 = -\frac{1}{24} & g_{5,40}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{5,53}^2 = -\frac{9}{8} & g_{5,66}^2 = \frac{9}{8} & g_{5,79}^2 = -\frac{1}{24} & g_{6,53}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{6,66}^2 = -\frac{9}{8} & g_{6,79}^2 = \frac{9}{8} & g_{6,92}^2 = -\frac{1}{24} & g_{7,66}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{7,79}^2 = -\frac{9}{8} & g_{7,92}^2 = \frac{9}{8} & g_{7,105}^2 = -\frac{1}{24} & g_{8,79}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{8,92}^2 = -\frac{9}{8} & g_{8,105}^2 = \frac{9}{8} & g_{8,118}^2 = -\frac{1}{24} & g_{9,92}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{9,105}^2 = -\frac{9}{8} & g_{9,118}^2 = \frac{9}{8} & g_{9,131}^2 = -\frac{1}{24} & g_{10,105}^2 = \frac{1}{24} \\
g_{10,118}^2 = -\frac{9}{8} & g_{10,131}^2 = \frac{9}{8} & g_{10,144}^2 = -\frac{1}{24} & g_{11,92}^2 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,105}^2 = \frac{5}{24} & g_{11,118}^2 = -\frac{3}{8} & g_{11,131}^2 = -\frac{17}{24} & g_{11,144}^2 = \frac{11}{12} \\
g_{12,92}^2 = \frac{697}{4884} & g_{12,105}^2 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,118}^2 = \frac{3309}{3256} & g_{12,131}^2 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,144}^2 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,156}^2 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_3}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,3}^3 = -\frac{1152}{407} & g_{1,15}^3 = \frac{10063}{3256} & g_{1,28}^3 = \frac{2483}{9768} & g_{1,41}^3 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,54}^3 = \frac{2099}{3256} & g_{1,67}^3 = -\frac{697}{4884} & g_{2,15}^3 = -\frac{11}{12} & g_{2,28}^3 = \frac{17}{24} \\
g_{2,41}^3 = -\frac{3}{8} & g_{2,54}^3 = -\frac{5}{24} & g_{2,67}^3 = \frac{1}{24} & g_{3,15}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{3,28}^3 = -\frac{9}{8} & g_{3,41}^3 = \frac{9}{8} & g_{3,54}^3 = -\frac{1}{24} & g_{4,28}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{4,41}^3 = -\frac{9}{8} & g_{4,54}^3 = \frac{9}{8} & g_{4,67}^3 = -\frac{1}{24} & g_{5,41}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{5,54}^3 = -\frac{9}{8} & g_{5,67}^3 = \frac{9}{8} & g_{5,80}^3 = -\frac{1}{24} & g_{6,54}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{6,67}^3 = -\frac{9}{8} & g_{6,80}^3 = \frac{9}{8} & g_{6,93}^3 = -\frac{1}{24} & g_{7,67}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{7,80}^3 = -\frac{9}{8} & g_{7,93}^3 = \frac{9}{8} & g_{7,106}^3 = -\frac{1}{24} & g_{8,80}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{8,93}^3 = -\frac{9}{8} & g_{8,106}^3 = \frac{9}{8} & g_{8,119}^3 = -\frac{1}{24} & g_{9,93}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{9,106}^3 = -\frac{9}{8} & g_{9,119}^3 = \frac{9}{8} & g_{9,132}^3 = -\frac{1}{24} & g_{10,106}^3 = \frac{1}{24} \\
g_{10,119}^3 = -\frac{9}{8} & g_{10,132}^3 = \frac{9}{8} & g_{10,145}^3 = -\frac{1}{24} & g_{11,93}^3 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,106}^3 = \frac{5}{24} & g_{11,119}^3 = -\frac{3}{8} & g_{11,132}^3 = -\frac{17}{24} & g_{11,145}^3 = \frac{11}{12} \\
g_{12,93}^3 = \frac{697}{4884} & g_{12,106}^3 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,119}^3 = \frac{3309}{3256} & g_{12,132}^3 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,145}^3 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,157}^3 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_4}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,4}^4 = -\frac{1152}{407} & g_{1,16}^4 = \frac{10063}{3256} & g_{1,29}^4 = \frac{2483}{9768} & g_{1,42}^4 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,55}^4 = \frac{2099}{3256} & g_{1,68}^4 = -\frac{697}{4884} & g_{2,16}^4 = -\frac{11}{12} & g_{2,29}^4 = \frac{17}{24} \\
g_{2,42}^4 = -\frac{3}{8} & g_{2,55}^4 = -\frac{5}{24} & g_{2,68}^4 = \frac{1}{24} & g_{3,16}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{3,29}^4 = -\frac{9}{8} & g_{3,42}^4 = \frac{9}{8} & g_{3,55}^4 = -\frac{1}{24} & g_{4,29}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{4,42}^4 = -\frac{9}{8} & g_{4,55}^4 = \frac{9}{8} & g_{4,68}^4 = -\frac{1}{24} & g_{5,42}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{5,55}^4 = -\frac{9}{8} & g_{5,68}^4 = \frac{9}{8} & g_{5,81}^4 = -\frac{1}{24} & g_{6,55}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{6,68}^4 = -\frac{9}{8} & g_{6,81}^4 = \frac{9}{8} & g_{6,94}^4 = -\frac{1}{24} & g_{7,68}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{7,81}^4 = -\frac{9}{8} & g_{7,94}^4 = \frac{9}{8} & g_{7,107}^4 = -\frac{1}{24} & g_{8,81}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{8,94}^4 = -\frac{9}{8} & g_{8,107}^4 = \frac{9}{8} & g_{8,120}^4 = -\frac{1}{24} & g_{9,94}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{9,107}^4 = -\frac{9}{8} & g_{9,120}^4 = \frac{9}{8} & g_{9,133}^4 = -\frac{1}{24} & g_{10,107}^4 = \frac{1}{24} \\
g_{10,120}^4 = -\frac{9}{8} & g_{10,133}^4 = \frac{9}{8} & g_{10,146}^4 = -\frac{1}{24} & g_{11,94}^4 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,107}^4 = \frac{5}{24} & g_{11,120}^4 = -\frac{3}{8} & g_{11,133}^4 = -\frac{17}{24} & g_{11,146}^4 = \frac{11}{12} \\
g_{12,94}^4 = \frac{697}{4884} & g_{12,107}^4 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,120}^4 = \frac{3309}{3256} & g_{12,133}^4 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,146}^4 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,158}^4 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_5}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,5}^5 = -\frac{1152}{407} & g_{1,17}^5 = \frac{10063}{3256} & g_{1,30}^5 = \frac{2483}{9768} & g_{1,43}^5 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,56}^5 = \frac{2099}{3256} & g_{1,69}^5 = -\frac{697}{4884} & g_{2,17}^5 = -\frac{11}{12} & g_{2,30}^5 = \frac{17}{24} \\
g_{2,43}^5 = -\frac{3}{8} & g_{2,56}^5 = -\frac{5}{24} & g_{2,69}^5 = \frac{1}{24} & g_{3,17}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{3,30}^5 = -\frac{9}{8} & g_{3,43}^5 = \frac{9}{8} & g_{3,56}^5 = -\frac{1}{24} & g_{4,30}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{4,43}^5 = -\frac{9}{8} & g_{4,56}^5 = \frac{9}{8} & g_{4,69}^5 = -\frac{1}{24} & g_{5,43}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{5,56}^5 = -\frac{9}{8} & g_{5,69}^5 = \frac{9}{8} & g_{5,82}^5 = -\frac{1}{24} & g_{6,56}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{6,69}^5 = -\frac{9}{8} & g_{6,82}^5 = \frac{9}{8} & g_{6,95}^5 = -\frac{1}{24} & g_{7,69}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{7,82}^5 = -\frac{9}{8} & g_{7,95}^5 = \frac{9}{8} & g_{7,108}^5 = -\frac{1}{24} & g_{8,82}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{8,95}^5 = -\frac{9}{8} & g_{8,108}^5 = \frac{9}{8} & g_{8,121}^5 = -\frac{1}{24} & g_{9,95}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{9,108}^5 = -\frac{9}{8} & g_{9,121}^5 = \frac{9}{8} & g_{9,134}^5 = -\frac{1}{24} & g_{10,108}^5 = \frac{1}{24} \\
g_{10,121}^5 = -\frac{9}{8} & g_{10,134}^5 = \frac{9}{8} & g_{10,147}^5 = -\frac{1}{24} & g_{11,95}^5 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,108}^5 = \frac{5}{24} & g_{11,121}^5 = -\frac{3}{8} & g_{11,134}^5 = -\frac{17}{24} & g_{11,147}^5 = \frac{11}{12} \\
g_{12,95}^5 = \frac{697}{4884} & g_{12,108}^5 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,121}^5 = \frac{3309}{3256} & g_{12,134}^5 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,147}^5 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,159}^5 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_6}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,6}^6 = -\frac{1152}{407} & g_{1,18}^6 = \frac{10063}{3256} & g_{1,31}^6 = \frac{2483}{9768} & g_{1,44}^6 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,57}^6 = \frac{2099}{3256} & g_{1,70}^6 = -\frac{697}{4884} & g_{2,18}^6 = -\frac{11}{12} & g_{2,31}^6 = \frac{17}{24} \\
g_{2,44}^6 = -\frac{3}{8} & g_{2,57}^6 = -\frac{5}{24} & g_{2,70}^6 = \frac{1}{24} & g_{3,18}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{3,31}^6 = -\frac{9}{8} & g_{3,44}^6 = \frac{9}{8} & g_{3,57}^6 = -\frac{1}{24} & g_{4,31}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{4,44}^6 = -\frac{9}{8} & g_{4,57}^6 = \frac{9}{8} & g_{4,70}^6 = -\frac{1}{24} & g_{5,44}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{5,57}^6 = -\frac{9}{8} & g_{5,70}^6 = \frac{9}{8} & g_{5,83}^6 = -\frac{1}{24} & g_{6,57}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{6,70}^6 = -\frac{9}{8} & g_{6,83}^6 = \frac{9}{8} & g_{6,96}^6 = -\frac{1}{24} & g_{7,70}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{7,83}^6 = -\frac{9}{8} & g_{7,96}^6 = \frac{9}{8} & g_{7,109}^6 = -\frac{1}{24} & g_{8,83}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{8,96}^6 = -\frac{9}{8} & g_{8,109}^6 = \frac{9}{8} & g_{8,122}^6 = -\frac{1}{24} & g_{9,96}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{9,109}^6 = -\frac{9}{8} & g_{9,122}^6 = \frac{9}{8} & g_{9,135}^6 = -\frac{1}{24} & g_{10,109}^6 = \frac{1}{24} \\
g_{10,122}^6 = -\frac{9}{8} & g_{10,135}^6 = \frac{9}{8} & g_{10,148}^6 = -\frac{1}{24} & g_{11,96}^6 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,109}^6 = \frac{5}{24} & g_{11,122}^6 = -\frac{3}{8} & g_{11,135}^6 = -\frac{17}{24} & g_{11,148}^6 = \frac{11}{12} \\
g_{12,96}^6 = \frac{697}{4884} & g_{12,109}^6 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,122}^6 = \frac{3309}{3256} & g_{12,135}^6 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,148}^6 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,160}^6 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_7}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,7}^7 = -\frac{1152}{407} & g_{1,19}^7 = \frac{10063}{3256} & g_{1,32}^7 = \frac{2483}{9768} & g_{1,45}^7 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,58}^7 = \frac{2099}{3256} & g_{1,71}^7 = -\frac{697}{4884} & g_{2,19}^7 = -\frac{11}{12} & g_{2,32}^7 = \frac{17}{24} \\
g_{2,45}^7 = -\frac{3}{8} & g_{2,58}^7 = -\frac{5}{24} & g_{2,71}^7 = \frac{1}{24} & g_{3,19}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{3,32}^7 = -\frac{9}{8} & g_{3,45}^7 = \frac{9}{8} & g_{3,58}^7 = -\frac{1}{24} & g_{4,32}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{4,45}^7 = -\frac{9}{8} & g_{4,58}^7 = \frac{9}{8} & g_{4,71}^7 = -\frac{1}{24} & g_{5,45}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{5,58}^7 = -\frac{9}{8} & g_{5,71}^7 = \frac{9}{8} & g_{5,84}^7 = -\frac{1}{24} & g_{6,58}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{6,71}^7 = -\frac{9}{8} & g_{6,84}^7 = \frac{9}{8} & g_{6,97}^7 = -\frac{1}{24} & g_{7,71}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{7,84}^7 = -\frac{9}{8} & g_{7,97}^7 = \frac{9}{8} & g_{7,110}^7 = -\frac{1}{24} & g_{8,84}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{8,97}^7 = -\frac{9}{8} & g_{8,110}^7 = \frac{9}{8} & g_{8,123}^7 = -\frac{1}{24} & g_{9,97}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{9,110}^7 = -\frac{9}{8} & g_{9,123}^7 = \frac{9}{8} & g_{9,136}^7 = -\frac{1}{24} & g_{10,110}^7 = \frac{1}{24} \\
g_{10,123}^7 = -\frac{9}{8} & g_{10,136}^7 = \frac{9}{8} & g_{10,149}^7 = -\frac{1}{24} & g_{11,97}^7 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,110}^7 = \frac{5}{24} & g_{11,123}^7 = -\frac{3}{8} & g_{11,136}^7 = -\frac{17}{24} & g_{11,149}^7 = \frac{11}{12} \\
g_{12,97}^7 = \frac{697}{4884} & g_{12,110}^7 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,123}^7 = \frac{3309}{3256} & g_{12,136}^7 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,149}^7 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,161}^7 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_8}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,8}^8 = -\frac{1152}{407} & g_{1,20}^8 = \frac{10063}{3256} & g_{1,33}^8 = \frac{2483}{9768} & g_{1,46}^8 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,59}^8 = \frac{2099}{3256} & g_{1,72}^8 = -\frac{697}{4884} & g_{2,20}^8 = -\frac{11}{12} & g_{2,33}^8 = \frac{17}{24} \\
g_{2,46}^8 = -\frac{3}{8} & g_{2,59}^8 = -\frac{5}{24} & g_{2,72}^8 = \frac{1}{24} & g_{3,20}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{3,33}^8 = -\frac{9}{8} & g_{3,46}^8 = \frac{9}{8} & g_{3,59}^8 = -\frac{1}{24} & g_{4,33}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{4,46}^8 = -\frac{9}{8} & g_{4,59}^8 = \frac{9}{8} & g_{4,72}^8 = -\frac{1}{24} & g_{5,46}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{5,59}^8 = -\frac{9}{8} & g_{5,72}^8 = \frac{9}{8} & g_{5,85}^8 = -\frac{1}{24} & g_{6,59}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{6,72}^8 = -\frac{9}{8} & g_{6,85}^8 = \frac{9}{8} & g_{6,98}^8 = -\frac{1}{24} & g_{7,72}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{7,85}^8 = -\frac{9}{8} & g_{7,98}^8 = \frac{9}{8} & g_{7,111}^8 = -\frac{1}{24} & g_{8,85}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{8,98}^8 = -\frac{9}{8} & g_{8,111}^8 = \frac{9}{8} & g_{8,124}^8 = -\frac{1}{24} & g_{9,98}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{9,111}^8 = -\frac{9}{8} & g_{9,124}^8 = \frac{9}{8} & g_{9,137}^8 = -\frac{1}{24} & g_{10,111}^8 = \frac{1}{24} \\
g_{10,124}^8 = -\frac{9}{8} & g_{10,137}^8 = \frac{9}{8} & g_{10,150}^8 = -\frac{1}{24} & g_{11,98}^8 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,111}^8 = \frac{5}{24} & g_{11,124}^8 = -\frac{3}{8} & g_{11,137}^8 = -\frac{17}{24} & g_{11,150}^8 = \frac{11}{12} \\
g_{12,98}^8 = \frac{697}{4884} & g_{12,111}^8 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,124}^8 = \frac{3309}{3256} & g_{12,137}^8 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,150}^8 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,162}^8 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_9}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,9}^9 = -\frac{1152}{407} & g_{1,21}^9 = \frac{10063}{3256} & g_{1,34}^9 = \frac{2483}{9768} & g_{1,47}^9 = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,60}^9 = \frac{2099}{3256} & g_{1,73}^9 = -\frac{697}{4884} & g_{2,21}^9 = -\frac{11}{12} & g_{2,34}^9 = \frac{17}{24} \\
g_{2,47}^9 = -\frac{3}{8} & g_{2,60}^9 = -\frac{5}{24} & g_{2,73}^9 = \frac{1}{24} & g_{3,21}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{3,34}^9 = -\frac{9}{8} & g_{3,47}^9 = \frac{9}{8} & g_{3,60}^9 = -\frac{1}{24} & g_{4,34}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{4,47}^9 = -\frac{9}{8} & g_{4,60}^9 = \frac{9}{8} & g_{4,73}^9 = -\frac{1}{24} & g_{5,47}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{5,60}^9 = -\frac{9}{8} & g_{5,73}^9 = \frac{9}{8} & g_{5,86}^9 = -\frac{1}{24} & g_{6,60}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{6,73}^9 = -\frac{9}{8} & g_{6,86}^9 = \frac{9}{8} & g_{6,99}^9 = -\frac{1}{24} & g_{7,73}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{7,86}^9 = -\frac{9}{8} & g_{7,99}^9 = \frac{9}{8} & g_{7,112}^9 = -\frac{1}{24} & g_{8,86}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{8,99}^9 = -\frac{9}{8} & g_{8,112}^9 = \frac{9}{8} & g_{8,125}^9 = -\frac{1}{24} & g_{9,99}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{9,112}^9 = -\frac{9}{8} & g_{9,125}^9 = \frac{9}{8} & g_{9,138}^9 = -\frac{1}{24} & g_{10,112}^9 = \frac{1}{24} \\
g_{10,125}^9 = -\frac{9}{8} & g_{10,138}^9 = \frac{9}{8} & g_{10,151}^9 = -\frac{1}{24} & g_{11,99}^9 = -\frac{1}{24} \\
g_{11,112}^9 = \frac{5}{24} & g_{11,125}^9 = -\frac{3}{8} & g_{11,138}^9 = -\frac{17}{24} & g_{11,151}^9 = \frac{11}{12} \\
g_{12,99}^9 = \frac{697}{4884} & g_{12,112}^9 = -\frac{2099}{3256} & g_{12,125}^9 = \frac{3309}{3256} & g_{12,138}^9 = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,151}^9 = -\frac{10063}{3256} & g_{12,163}^9 = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_{10}}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,10}^{10} = -\frac{1152}{407} & g_{1,22}^{10} = \frac{10063}{3256} & g_{1,35}^{10} = \frac{2483}{9768} & g_{1,48}^{10} = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,61}^{10} = \frac{2099}{3256} & g_{1,74}^{10} = -\frac{697}{4884} & g_{2,22}^{10} = -\frac{11}{12} & g_{2,35}^{10} = \frac{17}{24} \\
g_{2,48}^{10} = -\frac{3}{8} & g_{2,61}^{10} = -\frac{5}{24} & g_{2,74}^{10} = \frac{1}{24} & g_{3,22}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{3,35}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{3,48}^{10} = \frac{9}{8} & g_{3,61}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{4,35}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{4,48}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{4,61}^{10} = \frac{9}{8} & g_{4,74}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{5,48}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{5,61}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{5,74}^{10} = \frac{9}{8} & g_{5,87}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{6,61}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{6,74}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{6,87}^{10} = \frac{9}{8} & g_{6,100}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{7,74}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{7,87}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{7,100}^{10} = \frac{9}{8} & g_{7,113}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{8,87}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{8,100}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{8,113}^{10} = \frac{9}{8} & g_{8,126}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{9,100}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{9,113}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{9,126}^{10} = \frac{9}{8} & g_{9,139}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{10,113}^{10} = \frac{1}{24} \\
g_{10,126}^{10} = -\frac{9}{8} & g_{10,139}^{10} = \frac{9}{8} & g_{10,152}^{10} = -\frac{1}{24} & g_{11,100}^{10} = -\frac{1}{24} \\
g_{11,113}^{10} = \frac{5}{24} & g_{11,126}^{10} = -\frac{3}{8} & g_{11,139}^{10} = -\frac{17}{24} & g_{11,152}^{10} = \frac{11}{12} \\
g_{12,100}^{10} = \frac{697}{4884} & g_{12,113}^{10} = -\frac{2099}{3256} & g_{12,126}^{10} = \frac{3309}{3256} & g_{12,139}^{10} = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,152}^{10} = -\frac{10063}{3256} & g_{12,164}^{10} = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

Entradas no nulas para el bloque $\mathcal{G}_{y_{11}}$

$$\begin{array}{llll}
g_{1,11}^{11} = -\frac{1152}{407} & g_{1,23}^{11} = \frac{10063}{3256} & g_{1,36}^{11} = \frac{2483}{9768} & g_{1,49}^{11} = -\frac{3309}{3256} \\
g_{1,62}^{11} = \frac{2099}{3256} & g_{1,75}^{11} = -\frac{697}{4884} & g_{2,23}^{11} = -\frac{11}{12} & g_{2,36}^{11} = \frac{17}{24} \\
g_{2,49}^{11} = -\frac{3}{8} & g_{2,62}^{11} = -\frac{5}{24} & g_{2,75}^{11} = \frac{1}{24} & g_{3,23}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{3,36}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{3,49}^{11} = \frac{9}{8} & g_{3,62}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{4,36}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{4,49}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{4,62}^{11} = \frac{9}{8} & g_{4,75}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{5,49}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{5,62}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{5,75}^{11} = \frac{9}{8} & g_{5,88}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{6,62}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{6,75}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{6,88}^{11} = \frac{9}{8} & g_{6,101}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{7,75}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{7,88}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{7,101}^{11} = \frac{9}{8} & g_{7,114}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{8,88}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{8,101}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{8,114}^{11} = \frac{9}{8} & g_{8,127}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{9,101}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{9,114}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{9,127}^{11} = \frac{9}{8} & g_{9,140}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{10,114}^{11} = \frac{1}{24} \\
g_{10,127}^{11} = -\frac{9}{8} & g_{10,140}^{11} = \frac{9}{8} & g_{10,153}^{11} = -\frac{1}{24} & g_{11,101}^{11} = -\frac{1}{24} \\
g_{11,114}^{11} = \frac{5}{24} & g_{11,127}^{11} = -\frac{3}{8} & g_{11,140}^{11} = -\frac{17}{24} & g_{11,153}^{11} = \frac{11}{12} \\
g_{12,101}^{11} = \frac{697}{4884} & g_{12,114}^{11} = -\frac{2099}{3256} & g_{12,127}^{11} = \frac{3309}{3256} & g_{12,140}^{11} = -\frac{2483}{9768} \\
& g_{12,153}^{11} = -\frac{10063}{3256} & g_{12,165}^{11} = \frac{1152}{407} &
\end{array}$$

El número total de elementos del Operador Gradiente es de 43560, de los cuales, 1188 son no nulos, lo que corresponde al 2,56 %, y a su vez representa una disminución de casi la mitad, porcentualmente hablando, con respecto al Operador Gradiente de orden 2.

Fórmulas de Aproximación de la Derivada

A continuación se muestran las fórmulas de aproximación de la derivada dado el operador gradiente mimético bidimensional de orden $k = 4$, tanto en el interior del mallado como en la frontera.

Nodos interiores

Para $i = 3, \dots, N - 1$ y $j = 1, \dots, M$, entonces:

$$\mathcal{G}_x\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{24}\left(i - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{9}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{8}\left(i + \frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{24}\left(i + \frac{5}{2}\right)^n\right)h_x^{n-1}$$

Para $i = 1, \dots, N$ y $j = 3, \dots, M - 1$, entonces:

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right) = \left(\frac{1}{24}\left(j - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{9}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{8}\left(j + \frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{24}\left(j + \frac{5}{2}\right)^n\right)h_y^{n-1}$$

En la figura 3.16 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

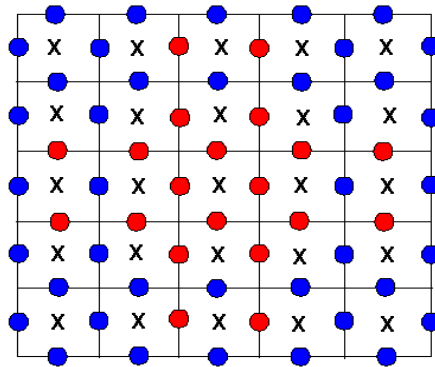


Figura 3.16: Nodos Interiores

Nodos de Frontera Izquierda (1)

Para $j = 1, \dots, M$, entonces:

$$\mathcal{G}_x\left(x_1, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{10063}{3256}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2483}{9768}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3309}{3256}\left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{2099}{3256}\left(\frac{7}{2}\right)^n - \frac{697}{4884}\left(\frac{9}{2}\right)^n\right)h_x^{n-1}$$

En la figura 3.17 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

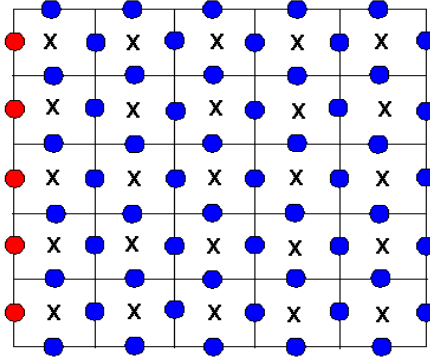


Figura 3.17: Nodos Frontera Izquierda (1)

Nodos de Frontera Izquierda (2)

Para $j = 1, \dots, M$, entonces:

$$\mathcal{G}_x\left(x_2, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(-\frac{11}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{17}{24}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{3}{8}\left(\frac{5}{2}\right)^n - \frac{5}{24}\left(\frac{7}{2}\right)^n + \frac{1}{24}\left(\frac{9}{2}\right)^n\right)h_x^{n-1}$$

En la figura 3.18 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

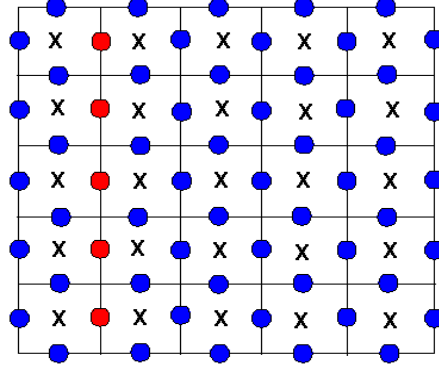


Figura 3.18: Nodos Frontera Izquierda (2)

Nodos de Frontera Derecha (1)

Para $j = 1, \dots, M$, entonces:

$$\mathcal{G}_x \left(x_{N+1}, y_{j+\frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{697}{4884} \left(N - \frac{9}{2} \right)^n - \frac{2099}{3256} \left(N - \frac{7}{2} \right)^n + \frac{3309}{3256} \left(N - \frac{5}{2} \right)^n - \right. \\ \left. - \frac{2483}{9768} \left(N - \frac{3}{2} \right)^n - \frac{10063}{3256} \left(N - \frac{1}{2} \right)^n + \frac{1152}{407} N^n \right) h_x^{n-1}$$

En la figura 3.19 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

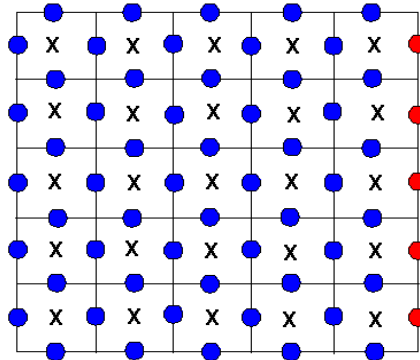


Figura 3.19: Nodos Frontera Derecha (1)

Nodos de Frontera Derecha (2)

Para $j = 1, \dots, M$, entonces:

$$\mathcal{G}_x\left(x_N, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{24}\left(N - \frac{9}{2}\right)^n + \frac{5}{24}\left(N - \frac{7}{2}\right)^n - \frac{3}{8}\left(N - \frac{5}{2}\right)^n - \right. \\ \left. -\frac{17}{24}\left(N - \frac{3}{2}\right)^n + \frac{11}{12}\left(N - \frac{1}{2}\right)^n \right) h_x^{n-1}$$

En la figura 3.20 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

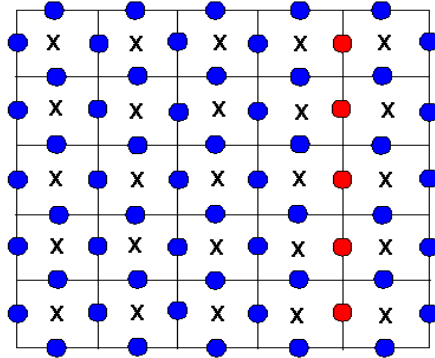


Figura 3.20: Nodos Frontera Derecha (2)

Nodos de Frontera Inferior (1)

Para $i = 1, \dots, N$, entonces:

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_1\right) = \left(\frac{10063}{3256}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2483}{9768}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3309}{3256}\left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{2099}{3256}\left(\frac{7}{2}\right)^n - \frac{697}{4884}\left(\frac{9}{2}\right)^n \right) h_y^{n-1}$$

En la figura 3.21 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

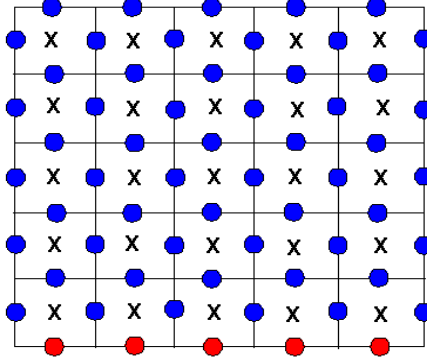


Figura 3.21: Nodos Frontera Inferior (1)

Nodos de Frontera Inferior (2)

Para $i = 1, \dots, N$, entonces:

$$\mathcal{G}_y \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_2 \right) = \left(-\frac{11}{12} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{17}{24} \left(\frac{3}{2} \right)^n + \frac{3}{8} \left(\frac{5}{2} \right)^n - \frac{5}{24} \left(\frac{7}{2} \right)^n + \frac{1}{24} \left(\frac{9}{2} \right)^n \right) h_y^{n-1}$$

En la figura 3.22 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

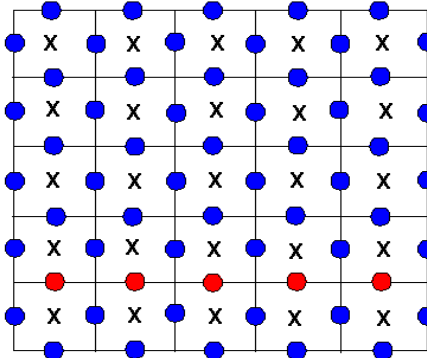


Figura 3.22: Nodos Frontera Inferior (2)

Nodos de Frontera Superior (1)

Para $i = 1, \dots, N$, entonces:

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{M+1}\right) = \left(\frac{697}{4884} \left(M - \frac{9}{2}\right)^n - \frac{2099}{3256} \left(M - \frac{7}{2}\right)^n + \frac{3309}{3256} \left(M - \frac{5}{2}\right)^n - \right. \\ \left. - \frac{2483}{9768} \left(M - \frac{3}{2}\right)^n - \frac{10063}{3256} \left(M - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1152}{407} M^n \right) h_y^{n-1}$$

En la figura 3.23 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

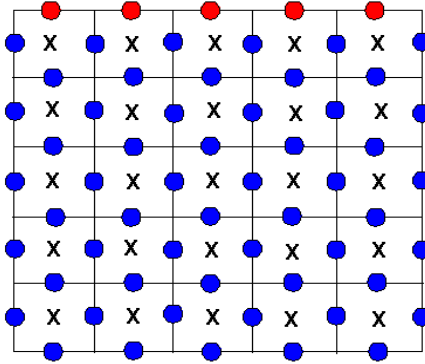


Figura 3.23: Nodos Frontera Superior (1)

Nodos de Frontera Superior (2)

Para $i = 1, \dots, N$, entonces:

$$\mathcal{G}_y\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_M\right) = \left(-\frac{1}{24} \left(M - \frac{9}{2}\right)^n + \frac{5}{24} \left(M - \frac{7}{2}\right)^n - \frac{3}{8} \left(M - \frac{5}{2}\right)^n - \right. \\ \left. - \frac{17}{24} \left(M - \frac{3}{2}\right)^n + \frac{11}{12} \left(M - \frac{1}{2}\right)^n \right) h_y^{n-1}$$

En la figura 3.24 se muestran en color rojo el conjunto de nodos a que hacen referencia las fórmulas anteriores.

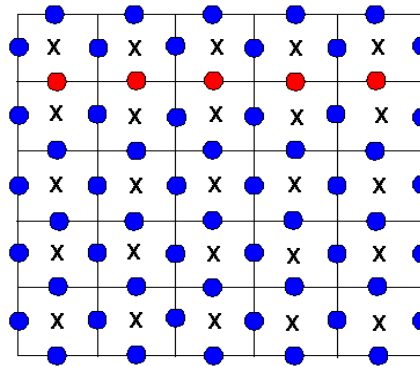
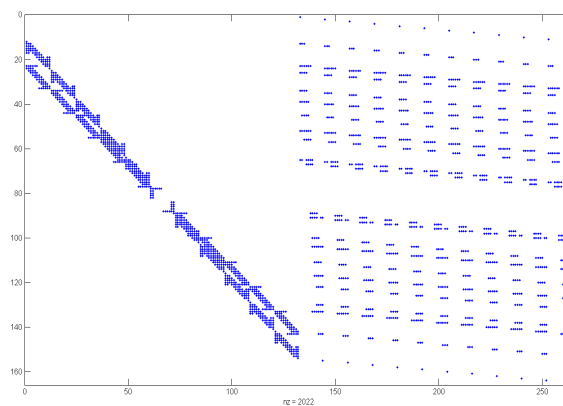


Figura 3.24: Nodos Frontera Superior (2)

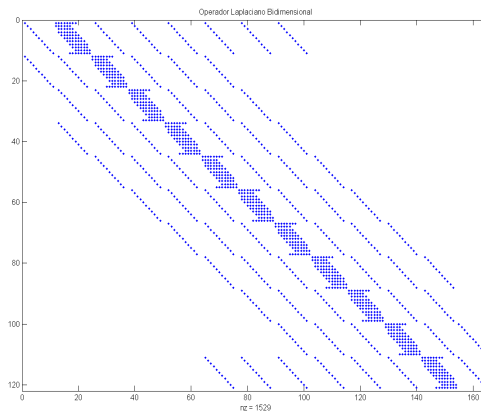
3.2.3. Operador de Frontera

Nuevamente, dada la imposibilidad de presentar el operador de frontera $\mathbf{B}$, dada su dimensión (165×264), sólo se mostrará su estructura; sin embargo pueden verse los detalles ejecutando el código en Matlab (ver Apéndice I)



3.2.4. Operador Laplaciano

Al igual que se hizo anteriormente, sólo se mostrará la estructura del operador laplaciano, dada la dimensión de éste (121×165). Los detalles de dicho operador pueden verse ejecutando el código en Matlab (ver *Apéndice I*)



3.3. Estudio del Orden de Convergencia de los Operadores

Orden de Convergencia

Una expresión matemática que aproxime a un número, se dice que tiene orden de aproximación k (entero no negativo) si ella es exacta para los polinomios $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ con $n \leq k$; pero no es exacta para el polinomio $P_{k+1}(x)$.

Dada la definición anterior, para hacer el estudio de convergencia de los operadores miméticos de divergencia y gradiente, de orden 2 y orden 4, se hará uso de polinomios en dos variables. Así mismo, se hará uso de un programa computacional de cálculo simbólico (MAPLE 10) para verificar la aproximación.

Divergencia

Sea $F(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$. En general, la divergencia de F para el caso continuo viene dada por

$$\nabla \cdot F = P_x(x, y) + Q_y(x, y),$$

donde P_x y Q_y son las derivadas parciales de las componentes del campo F a lo largo de los ejes coordenados X e Y respectivamente.

A efectos de hacer el estudio de convergencia que nos ocupa, se considera el campo vectorial polinomial $F(x, y) = x^n e_1 + y^n e_2$, $n = 0, 1, \dots, k$; donde k es el orden de convergencia deseado. Este campo tiene como divergencia en la celda (x_i, y_j) el escalar:

$$\nabla \cdot F(x_i, y_j) = nx_i^{n-1} + ny_j^{n-1}$$

Para el caso continuo, si $k = 2$ y $n = 2$, la divergencia viene dada por:

$$\nabla \cdot F(x_i, y_j) = 2x_i + 2y_j$$

Evidentemente, todo depende del punto de evaluación de la derivada. Por ejemplo, la divergencia en la celda $(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}})$ es:

$$\nabla \cdot F\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = 2x_{\frac{3}{2}} + 2y_{\frac{3}{2}}$$

Para el caso de mallados tensoriales uniformes y $N = M = 5$, la expresión que genera cada uno de los x_i es:

$$x_{i+1} = ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, 5$$

Puesto que

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 1, \dots, 5$$

entonces

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(i-1)h_x + ih_x}{2} = \frac{(2i-1)h_x}{2} = \left(i - \frac{1}{2}\right)h_x$$

De igual forma resulta para el cálculo de y_{j+1} y $y_{j+\frac{1}{2}}$ cambiando h_x por h_y .

Sustituyendo así el valor de $x_{\frac{3}{2}}$ y $y_{\frac{3}{2}}$, tenemos que:

$$\nabla \cdot F\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}h_x\right) + 2\left(\frac{1}{2}h_y\right)$$

$$\nabla \cdot F\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = h_x + h_y$$

Ahora bien, el análogo discreto del campo vectorial F , se denominará V (campo vectorial discreto nodal). Dada la celda que se observa en la figura 3.5, en el punto $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right)$ es:

$$V\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = V_1\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)e_1 + V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right)e_2 = x_i^n e_1 + y_j^n e_2,$$

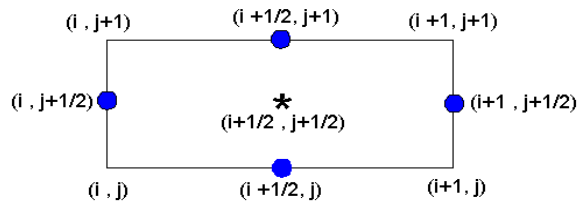


Figura 3.5: Celda Genérica

en donde V_1 y V_2 corresponden a las componentes en los ejes X e Y respectivamente con $n = 0, 1, 2$ para $k = 2$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4$ para $k = 4$. Así, una aproximación de la divergencia, viene dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}V\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \mathcal{D}V_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{D}V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) \\ \mathcal{D}V_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{V_1\left(x_{i+1}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) - V_1\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)}{h_{x_i}} = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{h_{x_i}} \\ \mathcal{D}V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+1}\right) - V_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right)}{h_{y_j}} = \frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{h_{y_j}}\end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$\mathcal{D}V\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{h_{x_i}} + \frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{h_{y_j}} \quad (3.3.1)$$

Con el fin de entender un poco mejor lo antes expuesto, se hará el desarrollo de los cálculos para $k = 2$ con $n = 2$, al igual que para $k = 4$ con $n = 4$ en algunas de las celdas.

Sea $V(x_i, y_j) = x_i^2 e_1 + y_j^2 e_2$. Si $i, j = 1$, tenemos que:

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{V_1\left(x_2, y_{\frac{3}{2}}\right) - V_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)}{h_x} + \frac{V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_2\right) - V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)}{h_y} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{h_x} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{h_y}$$

Sustituyendo ahora cada uno de los x_i y y_j correspondientes, la aproximación de la divergencia queda como sigue:

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{h_x^2}{h_x} + \frac{h_y^2}{h_y} = h_x + h_y$$

Luego, tomando $i = 2, \dots, 5$ y $j = 1$, tenemos:

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x_3^2 - x_2^2}{h_x} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{h_y} = 3h_x + h_y$$

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{7}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x_4^2 - x_3^2}{h_x} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{h_y} = 5h_x + h_y$$

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{9}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x_5^2 - x_4^2}{h_x} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{h_y} = 7h_x + h_y$$

$$\mathcal{D}V\left(x_{\frac{11}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x_6^2 - x_5^2}{h_x} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{h_y} = 9h_x + h_y$$

De forma análoga se hace para calcular la aproximación de la divergencia en cada una de las celdas restantes.

En el *Apéndice G* puede observarse detalles de los cálculos descritos anteriormente y que en efecto coinciden con el caso continuo para los campos vectoriales propuestos y un orden de aproximación $k = 2$.

Se dará ahora un ejemplo para $k = 4$ con $n = 4$ y $N = M = 11$. Puesto que $N = M = 11$, entonces $i, j = 1, \dots, 11$. Para efectos de ilustrar sólo se mostrarán los cálculos para $i = 1, \dots, 11$ y $j = 1$. Así:

$$\begin{aligned} \mathcal{DV}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = & \left(-\frac{4751}{5192}V_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{909}{1298}V_1\left(x_2, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{6091}{15576}V_1\left(x_3, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1165}{5192}V_1\left(x_4, y_{\frac{3}{2}}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{129}{2596}V_1\left(x_5, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{25}{15576}V_1\left(x_6, y_{\frac{3}{2}}\right)\right)\frac{1}{h_x} + \left(-\frac{4751}{5192}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) + \frac{909}{1298}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_2\right) + \right. \\ & \left. + \frac{6091}{15576}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_3\right) - \frac{1165}{5192}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_4\right) + \frac{129}{2596}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_5\right) - \frac{25}{15576}V_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_6\right)\right)\frac{1}{h_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = & -\frac{4751}{5192h_x}x_1^4 + \frac{909}{1298h_x}x_2^4 + \frac{6091}{15576h_x}x_3^4 - \frac{1165}{5192h_x}x_4^4 + \frac{129}{2596h_x}x_5^4 - \frac{25}{15576h_x}x_6^4 - \\ & -\frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ & \mathcal{D}\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3 \end{aligned}$$

De forma análoga se hacen los cálculos para el resto de las celdas.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = & \frac{1}{24h_x}x_1^4 - \frac{9}{8h_x}x_2^4 + \frac{9}{8h_x}x_3^4 - \frac{1}{24h_x}x_4^4 - \\ & -\frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ & \mathcal{D}\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{27}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{7}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_2^4 - \frac{9}{8h_x}x_3^4 + \frac{9}{8h_x}x_4^4 - \frac{1}{24h_x}x_5^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{7}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{125}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{9}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_3^4 - \frac{9}{8h_x}x_4^4 + \frac{9}{8h_x}x_5^4 - \frac{1}{24h_x}x_6^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{9}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{343}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{11}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_4^4 - \frac{9}{8h_x}x_5^4 + \frac{9}{8h_x}x_6^4 - \frac{1}{24h_x}x_7^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{11}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{729}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{13}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_5^4 - \frac{9}{8h_x}x_6^4 + \frac{9}{8h_x}x_7^4 - \frac{1}{24h_x}x_8^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{13}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1331}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{15}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_6^4 - \frac{9}{8h_x}x_7^4 + \frac{9}{8h_x}x_8^4 - \frac{1}{24h_x}x_9^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{15}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{2197}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{17}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_7^4 - \frac{9}{8h_x}x_8^4 + \frac{9}{8h_x}x_9^4 - \frac{1}{24h_x}x_{10}^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{17}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{3375}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{19}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_8^4 - \frac{9}{8h_x}x_9^4 + \frac{9}{8h_x}x_{10}^4 - \frac{1}{24h_x}x_{11}^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{19}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{4913}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{21}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1}{24h_x}x_9^4 - \frac{9}{8h_x}x_{10}^4 + \frac{9}{8h_x}x_{11}^4 - \frac{1}{24h_x}x_{12}^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{21}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{6859}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(x_{\frac{23}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{25}{15576h_x}x_7^4 - \frac{129}{2596h_x}x_8^4 + \frac{1165}{5192h_x}x_9^4 - \frac{6091}{15576h_x}x_{10}^4 - \frac{909}{1298h_x}x_{11}^4 + \frac{4751}{5192}x_{12}^4 - \\ &- \frac{4751}{5192h_y}y_1^4 + \frac{909}{1298h_y}y_2^4 + \frac{6091}{15576h_y}y_3^4 - \frac{1165}{5192h_y}y_4^4 + \frac{129}{2596h_y}y_5^4 - \frac{25}{15576h_y}y_6^4 \\ \mathcal{D}\left(x_{\frac{23}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{9261}{2}h_x^3 + \frac{1}{2}h_y^3\end{aligned}$$

Cabe destacar que en caso ser uniforme el mallado, entonces $h_x = h_y$.

En el *Apéndice H* puede observarse detalles de los cálculos descritos anteriormente y que en efecto coinciden con el caso continuo para los campos vectoriales propuestos y un orden de aproximación $k = 4$.

Gradiente

Sea $f(x, y) = P(x, y) + Q(x, y)$ un campo escalar. En general, el gradiente de $f(x, y)$ para el caso continuo viene dado por:

$$\nabla f(x, y) = P_x(x, y)e_1 + Q_y(x, y)e_2,$$

donde P_x y Q_y , al igual que para la divergencia, son las derivadas parciales de las componentes del campo f a lo largo de los ejes coordenados X e Y respectivamente. Nuevamente, a efectos de hacer el estudio de convergencia, se considerará un campo polinomial (en este caso escalar) $f(x, y) = x^n + y^n$, con $n = 0, 1, \dots, k$; donde k representa el orden de convergencia deseado. Este campo tiene como gradiente en el nodo (x_i, y_j) el vector:

$$\nabla f(x_i, y_j) = nx_i^{n-1}e_1 + ny_j^{n-1}e_2$$

Para el caso continuo en que $k = 2$ y $n = 2$, el gradiente es:

$$\nabla f(x_i, y_j) = 2x_ie_1 + 2y_je_2 = (2x_i, 2y_j)$$

De forma similar a como ocurre para la divergencia, depende del nodo sobre el cual se calcula el gradiente. Por ejemplo, el gradiente sobre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$\nabla f(x_1, y_1) = 2x_1e_1 + 2y_1e_2 = (0, 0)$$

$$\nabla f(x_2, y_2) = 2x_2e_1 + 2y_2e_2 = (2h_x, 2h_y)$$

Ahora bien, el análogo discreto del campo escalar f , lo denominaremos $\mathbf{f}$. Dada una celda genérica (ver figura 3.5), en el nodo (x_i, y_j) $\mathbf{f}$ es:

$$\mathbf{f}(x_i, y_j) = \mathbf{f}_1\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right) + \mathbf{f}_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right) = x_i^n + y_j^n,$$

en donde $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ corresponden a las componentes en los ejes X e Y respectivamente, con $n = 0, 1, 2$ para $k = 2$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4$ para $k = 4$. De esta forma, una aproximación para el gradiente, viene dada por:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_i, y_j) = \mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right)e_2$$

En caso de que $k = 2$ y $n = 2$, ya se ha mencionado que el mallado mínimo es de 5×5 y el gradiente mimético queda expresado como se muestra a continuación:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_1, y_1) = \mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)e_2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(\frac{-\frac{8}{3}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) + 3\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right)}{h_x}\right) \\ &= \left(\frac{-\frac{8}{3}\left(x_1^2 + y_{\frac{3}{2}}^2\right) + 3\left(x_{\frac{3}{2}}^2 + y_{\frac{3}{2}}^2\right) - \frac{1}{3}\left(x_{\frac{5}{2}}^2 + y_{\frac{3}{2}}^2\right)}{h_x}\right) \\ &= \left(\frac{-\frac{8}{3}x_1^2 + 3x_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3}x_{\frac{5}{2}}^2}{h_x}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{3}{4}h_x^2 - \frac{9}{12}h_x^2}{h_x}\right) = \frac{\frac{9h_x^2 - 9h_x^2}{12}}{h_x}\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 = (0, 0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) &= \left(\frac{-\frac{8}{3}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) + 3\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{5}{2}}\right)}{h_y}\right) \\ &= \left(\frac{-\frac{8}{3}\left(x_{\frac{3}{2}}^2 + y_1^2\right) + 3\left(x_{\frac{3}{2}}^2 + y_{\frac{3}{2}}^2\right) - \frac{1}{3}\left(x_{\frac{3}{2}}^2 + y_{\frac{5}{2}}^2\right)}{h_y}\right) \\ &= \left(\frac{-\frac{8}{3}y_1^2 + 3y_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3}y_{\frac{5}{2}}^2}{h_y}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{3}{4}h_y^2 - \frac{9}{12}h_y^2}{h_y}\right) = \frac{\frac{9h_y^2 - 9h_y^2}{12}}{h_y}\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)e_2 = (0, 0)$$

Así, tenemos que el gradiente en el nodo (x_1, y_1) es:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_1, y_1) = (0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$$

Ahora se mostrará el cálculo del gradiente en algunos de los nodos siguientes:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_2, y_1) = \mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_2, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_1\right)e_2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_2, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(\frac{\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \mathbf{f}_1\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right)}{h_x} \right) \\
&= \frac{\frac{9}{4}h_x^2 - \frac{1}{4}h_x^2}{h_x} = 2h_x
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_2, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 = (2h_x, 0)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_1\right) &= \left(\frac{-\frac{8}{3}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_1\right) + 3\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{3}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{5}{2}}\right)}{h_y} \right) \\
&= \left(\frac{-\frac{8}{3}y_1^2 + 3y_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3}y_{\frac{5}{2}}^2}{h_y} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{3}{4}h_y^2 - \frac{9}{12}h_y^2}{h_y} \right) = \frac{\frac{9h_y^2 - 9h_y^2}{12}}{h_y}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{5}{2}}, y_1\right)e_2 = (0, 0)$$

Tenemos entonces que el gradiente en el nodo (x_2, y_1) es:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_2, y_1) = (2h_x, 0) + (0, 0) = (2h_x, 0)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\mathbf{f}(x_3, y_1) &= \mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_3, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{7}{2}}, y_1\right)e_2 \\
&= \frac{x_{\frac{7}{2}}^2 - x_{\frac{5}{2}}^2}{h_x}e_1 + \frac{3y_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{1}{3}y_{\frac{5}{2}}^2}{h_y}e_2 \\
&= \frac{\frac{25}{4}h_x^2 - \frac{9}{4}h_x^2}{h_x}e_1 + \frac{\frac{3}{4}h_y^2 - \frac{3}{4}h_y^2}{h_y}e_2 \\
&= 4h_x e_1 + 0e_2
\end{aligned}$$

Tenemos que el gradiente en el nodo (x_3, y_1) es:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_3, y_1) = (4h_x, 0)$$

De forma análoga se calcula para el resto de los nodos, así:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\mathbf{f}(x_4, y_1) &= (6h_x, 0) \\
\mathcal{G}\mathbf{f}(x_5, y_1) &= (8h_x, 0) \\
\mathcal{G}\mathbf{f}(x_6, y_1) &= (10h_x, 0)
\end{aligned}$$

En el *Apéndice G* puede observarse detalles de los cálculos descritos anteriormente y que en efecto coinciden con el caso continuo para los campos escalares propuestos y un orden de aproximación $k = 2$.

De forma análoga se calcula el gradiente en el resto de los nodos. Ahora, se mostrarán los cálculos para obtener el gradiente mimético de orden $k = 4$ con $n = 4$ para algunos nodos, al igual que se hizo para $k = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\mathbf{f}(x_1, y_1) &= \mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)e_2 \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(-\frac{1152}{407}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{10063}{3256}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2483}{9768}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{3309}{3256}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{7}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2099}{3256}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{9}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) - \frac{697}{4884}\mathbf{f}_1\left(x_{\frac{11}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right)\right)\frac{1}{h_x} \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right) &= \left(-\frac{1152}{407}x_1^4 + \frac{10063}{3256}x_{\frac{3}{2}}^4 + \frac{2483}{9768}x_{\frac{5}{2}}^4 - \frac{3309}{3256}x_{\frac{7}{2}}^4 + \frac{2099}{3256}x_{\frac{9}{2}}^4 - \frac{697}{4884}x_{\frac{11}{2}}^4\right)\frac{1}{h_x} \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 &= \left(\frac{10063}{52096}h_x^3 + \frac{201123}{156288}h_x^3 - \frac{2068125}{52096}h_x^3 + \frac{5039699}{52096}h_x^3 - \frac{4573017}{78144}h_x^3\right)e_1 \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_1\left(x_1, y_{\frac{3}{2}}\right)e_1 &= (0, 0) \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) &= \left(-\frac{1152}{407}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) + \frac{10063}{3256}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2483}{9768}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{5}{2}}\right) - \right. \\
&\quad \left. -\frac{3309}{3256}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{7}{2}}\right) + \frac{2099}{3256}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{9}{2}}\right) - \frac{697}{4884}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{11}{2}}\right)\right)\frac{1}{h_y} \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right) &= \left(-\frac{1152}{407}y_1^4 + \frac{10063}{3256}y_{\frac{3}{2}}^4 + \frac{2483}{9768}y_{\frac{5}{2}}^4 - \frac{3309}{3256}y_{\frac{7}{2}}^4 + \frac{2099}{3256}y_{\frac{9}{2}}^4 - \frac{697}{4884}y_{\frac{11}{2}}^4\right)\frac{1}{h_y} \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)e_2 &= \left(\frac{10063}{52096}h_y^3 + \frac{201123}{156288}h_y^3 - \frac{2068125}{52096}h_y^3 + \frac{5039699}{52096}h_y^3 - \frac{4573017}{78144}h_y^3\right)e_2 \\
\mathcal{G}\mathbf{f}_2\left(x_{\frac{3}{2}}, y_1\right)e_2 &= (0, 0)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que el gradiente, sobre el nodo (x_1, y_1) , es:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_1, y_1) = (0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$$

A continuación se muestran los cálculos sobre el siguiente nodo (x_2, y_1) :

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_2, y_1) = \mathcal{G}\mathbf{f}_1(x_2, y_{\frac{3}{2}})e_1 + \mathcal{G}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1)e_2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathbf{f}_1(x_2, y_{\frac{3}{2}}) = & \left(-\frac{11}{12}\mathbf{f}_1(x_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) + \frac{17}{24}\mathbf{f}_1(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{8}\mathbf{f}_1(x_{\frac{7}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) - \frac{5}{24}\mathbf{f}_1(x_{\frac{9}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24}\mathbf{f}_1(x_{\frac{11}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) \right) \frac{1}{h_x} \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_1(x_2, y_{\frac{3}{2}}) = \left(-\frac{11}{12}x_{\frac{3}{2}}^4 + \frac{17}{24}x_{\frac{5}{2}}^4 + \frac{3}{8}x_{\frac{7}{2}}^4 - \frac{5}{24}x_{\frac{9}{2}}^4 + \frac{1}{24}x_{\frac{11}{2}}^4 \right) \frac{1}{h_x}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_1(x_2, y_{\frac{3}{2}})e_1 = \left(-\frac{11}{192}h_x^3 + \frac{1377}{384}h_x^3 + \frac{1875}{128}h_x^3 - \frac{12005}{384}h_x^3 + \frac{6561}{384}h_x^3 \right) e_1$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_1(x_2, y_{\frac{3}{2}})e_1 = (4h_x^3, 0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1) = & \left(-\frac{1152}{407}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1) + \frac{10063}{3256}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{3}{2}}) + \frac{2483}{9768}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{5}{2}}) - \frac{3309}{3256}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{7}{2}}) + \right. \\ & \left. + \frac{2099}{3256}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{9}{2}}) - \frac{697}{4884}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_{\frac{11}{2}}) \right) \frac{1}{h_y} \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1) = \left(-\frac{1152}{407}y_1^4 + \frac{10063}{3256}y_{\frac{3}{2}}^4 + \frac{2483}{9768}y_{\frac{5}{2}}^4 - \frac{3309}{3256}y_{\frac{7}{2}}^4 + \frac{2099}{3256}y_{\frac{9}{2}}^4 - \frac{697}{4884}y_{\frac{11}{2}}^4 \right) \frac{1}{h_y}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1)e_2 = \left(\frac{10063}{52096}h_x^3 + \frac{201123}{156288}h_x^3 - \frac{2068125}{52096}h_x^3 + \frac{5039699}{52096}h_x^3 - \frac{4573017}{78144}h_x^3 \right) e_2$$

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_2(x_{\frac{5}{2}}, y_1)e_2 = (0, 0)$$

Así, tenemos que el gradiente sobre el nodo (x_2, y_1) es:

$$\mathcal{G}\mathbf{f}(x_2, y_1) = (4h_x^3, 0) + (0, 0) = (4h_x^3, 0)$$

De forma análoga se realizan los cálculos sobre el resto de los nodos.

En el *Apéndice H* puede observarse detalles de los cálculos descritos anteriormente y que en efecto coinciden con el caso continuo para los campos escalares propuestos y un orden de aproximación $k = 4$.

Capítulo 4

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Usando análisis matricial, mediante una extensión del método de Montilla-Cadenas-Castillo se pudo construir aproximaciones de segundo y cuarto orden tanto para la divergencia como para el gradiente. Además se calculó el operador de frontera $\mathbf{B}$ necesario para satisfacer el teorema de la divergencia generalizada.

Se construyó el operador laplaciano a partir de los operadores divergencia y gradiente tanto de orden 2-2-2 como 4-4-4.

Un avance importante es la implementación de un código fuente en Matlab 7.0 que permite la obtención de los operadores miméticos bidimensionales de orden dos y orden cuatro sobre mallados tensoriales uniformes (cuadrados) de tamaño $N \times N$ para cualquier N , con la finalidad de utilizarlos en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. Además, a partir de esta implementación es muy sencillo programar o calcular para un k cualquiera.

Al ejecutar el programa en Matlab y hacer pruebas con distintos valores de N , pudimos notar que el número de elementos no nulos presentes en los operadores,

disminuye considerablemente conforme el valor de N aumenta, principalmente para el caso en que $k = 2$.

Un ejemplo puede verse en el operador de divergencia de orden dos. Tomando $N = 5$ (valor mínimo para $k = 2$) dicho operador tiene un total de 1500 elementos, de los cuales 100 son no nulos. Estos representan un 6,66 % del total. Al tomar $N = 7$, notamos que del total de 5488 elementos que conforman el operador, 196 son no nulos, representando estos el 3,571 % del total.

Es claro que la disminución de elementos en términos de porcentaje está cercano al 50 %. La misma tendencia se observó al seguir incrementando el valor de N ($N = 9$, $N = 11$, etc.)

En el caso de la divergencia de orden $k = 4$, se observó también disminución de los elementos no nulos conforme se incrementa el valor de N ; sin embargo, no es tan marcada.

La misma prueba se realizó para el gradiente, observándose resultados muy similares a los obtenidos con la divergencia en cuanto al porcentaje de disminución de elementos no nulos a medida que se incrementa el valor de N , tanto para $k = 2$ como para $k = 4$.

Apéndice A

OPERADORES DISCRETOS DE SEGUNDO ORDEN EN 1D: CÁLCULOS

En los apéndices se pueden observar los códigos de entrada para realizar los cálculos de todos los resultados que aparecen en el trabajo. Todos estos cálculos fueron realizados usando el programa de cálculo simbólico MAPLE 10 y Matlab 7.0. Normalmente sólo se coloca la entrada del código, se deja al lector para que realice la comprobación de la salida.

Este apéndice contiene los códigos de la divergencia y el gradiente unidimensional de segundo orden sobre un *mallado intercalado uniforme*.

Divergencia Discreta

Se plantea el sistema lineal $\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{r}$, donde el vector de incógnitas $\mathbf{a}$ son los elementos fila a fila de la matriz desconocida A . En el programa de cálculo simbólico

se usa para la matriz $\mathbf{M}$, el nombre *MDiv* o *MGrad* según sea la divergencia o el gradiente. De igual forma se hace para el vector $\mathbf{a}$.

```
restart: with(LinearAlgebra):
MDiv:=Matrix(<<1,1,1,0,0,0,1,0,0>|<1,-1,1,0,0,0,0,1,0>|<1,-3,9,0,0,0,0,0,0,
      1>|<0,0,0,1,3,9,1,0,0>|<0,0,0,1,1,1,0,1,0>|<0,0,0,1,-1,1,0,0,1>>);
r := <0,-2,0,0,-2,0,-1,0,1>;
adiv:=LinearSolve(MDiv,r);

          [-1]
          [ 1]
          [ 0]
adiv := [ 0]
          [-1]
          [ 1]
```

Gradiente Discreto

```
restart: with(LinearAlgebra):
MGrad:=Matrix(<<1,0,0,0,0,0,1,0,0>|<1,-1,1,0,0,0,0,1,0>|<1,-3,9,0,0,0,0,0,0,
      1>|<0,0,0,1,2,4,1,0,0>|<0,0,0,1,1,1,0,1,0>|<0,0,0,1,-1,1,0,0,1>>);
r:=(<0,-2,0,0,-2,0,-1,0,1>);
agrad:=LinearSolve(MGrad,r);
      Error, (in LinearAlgebra:-LA_Main:-LinearSolve) inconsistent system
MGr:=DeleteRow(MGrad,[2,5]);
rr:=(<0,0,0,0,-1,0,1>);
agrad:=LinearSolve(MGr,rr);

          [ -1 ]
          [9/8 ]
          [-1/8]
agrad := [ 0 ]
          [-9/8]
          [9/8 ]
```

```
Ahat:=Matrix([[ -1,9/8,-1/8],[0,-9/8,9/8]]);
```

```
Mw:=(<<0,0>|<-1,0>|<-3,0>|<0,2>|<0,1>|<0,-1>>);
```

Estas son sólo las entradas de Lambda en la diagonal

```
Lambda:= VectorScalarMultiply(MatrixVectorMultiply(Mw,agrad),-1/2);
```

```
[3/8]
```

```
Lambda := [ ]
```

```
[9/8]
```

```
P:=DiagonalMatrix(Lambda, 2, 2);
```

```
[3/8    0 ]
```

```
P := [ ]
```

```
[ 0    9/8]
```

```
A:=MatrixMatrixMultiply(MatrixInverse(P),Ahat);
```

```
[-8/3    3    -1/3]
```

```
A:= [ ]
```

```
[ 0    -1    1 ]
```

Apéndice B

OPERADORES DISCRETOS DE CUARTO ORDEN EN 1D: CÁLCULOS

El APÉNDICE B contiene los códigos para el cálculo de los operadores divergencia y gradiente de cuarto orden.

Operadores Discretos de Cuarto Orden

Una vez más se escriben solamente los comandos que permiten hacer los cálculos. Colocar las soluciones ocupa mucho espacio.

Divergencia de Cuarto Orden

Cuentas de la divergencia.

```
restart: with(linalg):  
MDiv:=matrix([ [1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [1,1,  
9,25,49,81,0, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [1,-1,-27,-125,
```

```

-343,-729,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [1,1,81,625,2401,
6561,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,
1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,9,1,1,9,25,49,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,27,1,-1,-27,-125,-343,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,81,1,1,81,625,2401,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,25,9,1,1,9,25,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,125,27,1,-1,-27,-125,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,625,
81,1,1,81,625,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
1,1,1,1,1,1], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,49,25,9,1,1,9],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,343,125,27,1,-1,-27], [0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2401,625,81,1,1,81], [1,0,0,0,0,0,1,
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,
0,0,0,0,0,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,
0,0,0], [0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0], [0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1]]):
r:=vector([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,-1/24,13/12,-1/24]);
adiv:=linsolve(MDiv,r,'r',p);
Ahat:=matrix([[-6851/6912+p[1] + p[2] +p[3],8153/13824-5*p[1]-5*p[2]
-5*p[3], 1289/1536 + 10*p[1]+10*p[2]+10*p[3],-9005/13824-10*p[1]
-10*p[2]-10*p[3],3529/13824+5*p[1]+5*p[2]+5*p[3],-1/24-p[1]-p[2]
-p[3]], [143/4608 - p[1], -429/512+5*p[1], 429/512 - 10*p[1],
-143/4608 + 10*p[1], - 5*p[1], p[1]], [ -p[2], 25/512 + 5*p[2],
-675/512 - 10*p[2], 675/512+10*p[2], - 25/512 - 5*p[2], p[2]],
[ -551/13824 - p[3], 2755/13824 + 5*p[3], - 551/1536 - 10*p[3],
-9367/13824+10*p[3], 6061/6912-5*p[3], p[3]]]);
Ahat:=subs({p[1]=0, p[2]=0,p[3]=-551/13824},matrix([[-6851/6912+p[1]
+p[2]+p[3], 8153/13824-5*p[1]-5*p[2]-5*p[3], 1289/1536+10*p[1]
+10*p[2] + 10*p[3], - 9005/13824 - 10*p[1] - 10*p[2] - 10*p[3],
3529/13824 + 5*p[1] + 5*p[2] + 5*p[3], -1/24 -p[1]- p[2]-p[3]],

```

```

[143/4608 - p[1], -429/512 + 5*p[1], 429/512-10*p[1], -143/4608
+10*p[1], -5*p[1], p[1]], [-p[2], 25/512+5*p[2], - 675/512
-10*p[2], 675/512+10*p[2], -25/512-5*p[2], p[2]], [-551/13824-p[3],
2755/13824 + 5*p[3], -551/1536 -10*p[3], -9367/13824 + 10*p[3],
6061/6912-5*p[3], p[3]]));
adiv:= vector([-4751/4608, 101/128, 6091/13824, -1165/4608, 43/768,
-25/13824, 143/4608, -429/512, 429/512, -143/4608, 0, 0, 0,
25/512, -675/512, 675/512, -25/512, 0, 0, 0, 551/13824,
-551/512, 551/512, -551/13824]);
Mw:= matrix([[1,-1,-3,-5,-7,-9,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,3,1,-1,-3,-5,-7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,5,3,1,-1,-3,-5,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,7,5,3,1,-1,-3]]);
Lambda:=evalm(Mw*adiv);

          [-649  -143  -75  -551]
Lambda := [----, ----, ---, ----]
          [288   96   32   288 ]

Q:=evalm((-1/2)*diag(-649/288,-143/96,-75/32,-551/288));
A:=evalm(inverse(Q)*Ahat);

[-4751/5192  909/1298  6091/15576  -1165/5192  129/2596  -25/15576 ]
[
[ 1/24      -9/8       9/8       -1/24      0        0        ]
A:=[
[ 0         1/24      -9/8       9/8       -1/24      0        ]
[
[ 0         0         1/24      -9/8       9/8       -1/24      ]

```

Gradiente de Cuarto Orden

Cálculos para el gradiente.

```
restart: with(linalg):
MGrad :=matrix( [ [ 1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,1,9,25, 49,81,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,-1,
-27, -125, -343, -729, 0, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0, 1,81, 625,2401,6561,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0, 0,0,0,0, 1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,
0,0,4,1,1,9,25,49,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,8,1,
-1,-27,-125,-343,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,16,1,
1,81,625,2401,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,16,9,1,
1,9,25,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,64,27,1,-1,-27,
-125,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,256,81,1,1,81,625,
0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,36,25,9,1,1,9], [0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,216,125,27,1,-1,-27], [0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1296,625,81,1,1,81], [1,0,0,0,0,0,1,
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0], [0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,
0,0,0,1,0,0,0], [0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,
0,0], [0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0], [0,0,
0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]]):
r:=vector([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,-1/24,13/12,-1/24]);
agrad:=linsolve(MGrad,r,'r',p);
Ahat:=matrix( [ [ -3901/3780+128/35*p[1] +128/35*p[2]+128/35*p[3],
10789/9216 -9*p[1]-9*p[2]-9*p[3], -421/27648+12*p[1]+12*p[2]
+ 12*p[3], -4063/15360 - 54/5*p[1] - 54/5*p[2] - 54/5*p[3],
11789/64512 + 36/7*p[1]+36/7*p[2]+36/7*p[3], -1/24-p[1]-p[2]
-p[3]], [473/2520-128/35*p[1], -14663/9216+9*p[1],13717/9216
```

```
P:=evalm(diag(407/1152, 473/384, 343/384, 1177/1152));
```

```
A:=evalm(inverse(P)*Ahat);  
  [-1152/407 10063/3256 2483/9768 -3309/3256 2099/3256 -697/4884]  
  [  
  [ 0      -11/12    17/24      3/8    -5/24    1/24  ]  
A:=[  
  [ 0      1/24     -9/8      9/8    -1/24    0    ]  
  [  
  [ 0      0      1/24     -9/8     9/8    -1/24  ]
```

Apéndice C

CÁLCULO DE LA MATRIZ UNIDIMENSIONAL B

En este apéndice se pueden observar la entrada de códigos que permiten calcular el operador de frontera **B**. Con esta matriz se garantiza el cumplimiento del teorema de la divergencia discreto para el producto interno pesado.

Matriz B: Orden Dos Uniforme

Para estos cálculos las matrices involucradas aparecen completas.

```
restart:  with(LinearAlgebra):  
Divex:=Matrix([[0,0,0,0,0],  [-1,1,0,0,0], [0,-1,1,0,0], [0,0,-1,1,0],  
              [0,0,0,-1,1], [0,0,0,0,0]]);  
Divex:=MatrixScalarMultiply(Divex,1/h);  
Q:=Matrix([[1,0,0,0,0,0], [0,1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0,0], [0,0,0,1,0,0],  
          [0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,1]]);  
Grad:=Matrix([[ -8/3, 3,  -1/3,0,0,0], [0,  -1,1,0,0,0], [0,0,-1,1,0,0],  
             [0,0,0,-1,1,0], [0,0,0,1/3,-3,8/3]]);
```

```

Grad:=MatrixScalarMultiply(Grad,1/h);
P:=Matrix([[3/8,0,0,0,0],[0,9/8,0,0,0],[0,0,1,0,0],[0,0,0,9/8,0],
          [0,0,0,0,3/8]]);
B=MatrixMatrixMultiply(Q,Divex)+MatrixMatrixMultiply(Transpose(Grad),P);

```

$$B = \begin{bmatrix}
-1/h & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/8h & -1/8h & 0 & 0 & 0 \\
-1/8h & 1/8h & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1/8h & 1/8h \\
0 & 0 & 0 & 1/8h & -1/8h \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/h
\end{bmatrix}$$

Matriz B: Orden Cuatro

```

restart: with(LinearAlgebra):
Divex:=matrix([[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[ -4751/(5192*h),909/(1298*h),
6091/(15576*h),-1165/(5192*h),129/(2596*h),-25/(15576*h),0,0,0,
0,0,0],[ 1/(24*h), -9/(8*h),9/(8*h),-1/(24*h),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0, 1/(24*h),-9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0, 0, 0,0,0,0,0], [0,0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0, 0, 0,0,0,0], [0,0,0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0, 0, 0,0], [0,0,0,0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0, 0, 0], [0,0,0,0,0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0, 0], [0, 0,0,0,0,0,0,
1/(24*h), -9/(8*h), 9/(8*h), -1/(24*h), 0], [0, 0, 0,0,0,0,0,0,
1/(24*h),-9/(8*h),9/(8*h),-1/(24*h)], [0,0,0,0,0,0,0,25/(15576*h),
-129/(2596*h), 1165/(5192*h), -6091/(15576*h), -909/(1298*h),

```

Universidad de Carabobo, FaCyT-Matemáticas

Apéndice D

FÓRMULAS DE DIFERENCIAS FINITAS

Fórmula Estándar de Cuarto Orden

Interpolación de Lagrange con la fórmula de diferencias divididas para $n = 3$.

restart;

```
P[3] := d0+(X-x[0])*d01+(X-x[0])*(X-x[1])*d012+X-x[0])*(X-x[1])*  
      (X-x[2])*d0123;
```

Donde:

```
d0:=f[0]; d01:=(f[1]-f[0])/(x[1]-x[0]);
```

```
d12:=(f[2]-f[1])/(x[2]-x[1]); d23:=(f[3]-f[2])/(x[3]-x[2]);
```

```
d012:=(d12-d01)/(x[2]-x[0]); d123:= (d23-d12)/(x[3]-x[1]);
```

```
d0123:=(d123-d012)/(x[3]-x[0]);
```

Luego, el polinomio finalmente queda (al sustituir las igualdades anteriores):

```
P[3] :=d0+(X-x[0])*d01+(X-x[0])*(X-x[1])*d012+(X-x[0])*(X-x[1])*  
      X-x[2])*d0123;
```

Derivando este polinomio respecto a X (se usa la equis mayúscula, para que al derivar Maple asuma que las $x[i]$ son constantes).

```
Pprima[3]:=diff(P[3],X);
```

La fórmula anterior es para mallados no uniformes. Veamos que ocurre si el mallado es uniforme:

```
PprimaU[3]:= simplify(subs({X-x[0]= 3*h/2, X-x[1] = h/2, X-x[2]= -h/2,
X-x[3] = -3*h/2, x[3]-x[0]=3*h,x[3]-x[1]=2*h,x[3]-x[2]=h,
x[2]-x[0]=2*h,x[2]-x[1]=h,x[1]-x[0]=h},Pprima[3]));
```

$$PprimaU[3] := \frac{27 f[2] - 27 f[1] - f[3] + f[0]}{24h}$$

Apéndice E

OPERADORES DISCRETOS DE SEGUNDO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MATLAB

En este apéndice puede verse el código en Matlab 7.0 implementado para calcular los operadores de divergencia y gradiente de segundo orden. Se han omitido las salidas para que el lector haga las pruebas.

Divergencia Discreta

```
function D=OperadorDivergencia2 (k,N)
%k= Orden del Operador
%N= Número de celdas del mallado

%clc;
format rational
```

```

if N<5 %Número mínimo de celdas sobre el cual se
        %desea calcular el Operador de Divergencia
        display('Introduzca un N mayor o igual 5')
else

filas=N*N; %Número total de filas
        %del Operador de Divergencia
columnas=2*N*(N + 1); %Número total de columnas
        %del Operador Gradiente

end

M=(N+1); % Número de columnas por bloque
cont1=1; % Contador auxiliar

i=1;
j=1;
while(i<=filas)
    if i==cont1*(M-1)+1
        j=i+cont1;
        cont1=cont1+1;
    end
    D(i,j)=-1;
    D(i,j+1)=1;
    i=i+1;
    j=j+1;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CONSTRUCCION 'Dy'%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Posición de la primera columna
%correspondiente al bloque Dy
t = (columnas/2+1);

```

```
for i=1:N:filas
    p=0;
    for j=t:(N+1):(columnas-1)
        D(i+p,j)=-1;
        D(i+p,j+1)=1;
        p=p+1;
    end
    t = t+1;
end

D=sparse(D)
display('El Operador de Divergencia Mimético de Segundo
Orden es de dimensión:')
size(D)
spy(D)

return;
```

Gradiente Discreto

```
function G= OperadorGradiente2 (k,N)

format rational

if N<5 %Número mínimo de celdas sobre el cual se
    %desea calcular el Operador Gradiente
    display('Introduzca un N mayor o igual 5')
else
```

```
filas=2*N*(N+1); % Número total de filas del
                    %Operador Gradiente
columnas=N*(N+4); % Número total de columnas
                    %del Operador Gradientes
end

%Primera fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a las componentes en el eje X
i=1;
for j=(N+1):(N+2):(columnas-(2*N+1))
    G(i,j)=-8/3;
    G(i,j+1)=3;
    G(i,j+2)=-1/3;

    %Filas interiores de cada uno de los bloques
    %correspondientes a las componentes en el eje X
    for r=0:(N-2)
        G(i+1+r,j+1+r)=-1;
        G(i+1+r,j+2+r)=1;
    end
    i=i+(N+1);
end

%Última fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a las componentes en el eje X
i=(N+1);
for j=2*N:(N+2):(columnas-(N+2))
    G(i,j)=1/3;
    G(i,j+1)=-3;
    G(i,j+2)=8/3;
    i=i+(N+1);
```

```

end

%G=sparse(G)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CONSTRUCCIÓN DE Gy%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Primera fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a las componentes en el eje Y
j=1;
for i=(filas/2+1):(N+1):filas
    G(i,j)=-8/3;
    G(i,j+(N+1))=3;
    G(i,j+(2*N+3))=-1/3;

    %Filas interiores de cada uno de los bloques correspondientes
    %a las componentes en el eje Y
    for p=0:(N-2)
        G(i+1+p,j+(N+1)+(N+2)*p)=-1;
        G(i+1+p,j+(2*N+3)+(N+2)*p)=1;
    end
    j=j+1;
end

%Última fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a las componentes en el eje Y
j=(columnas-(3*N+2));
for i=(filas/2+(N+1)):(N+1):filas
    G(i,j)=1/3;
    G(i,j+(N+2))=-3;
    G(i,j+(2*N+3))=8/3;
    j=j+1;
end

```

```
G=sparse(G)
display('El Operador Gradiente Mimético de Segundo Orden
es de dimensión:')
size(G)
spy(G)
QExtend=eye(columnas);

return;
```

Apéndice F

OPERADORES DISCRETOS DE CUARTO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MATLAB

En este apéndice puede verse el código en Matlab 7.0 implementado para calcular los operadores de divergencia y gradiente de cuarto orden. Se han omitido las salidas para que el lector haga las pruebas.

Divergencia Discreta

```
function D=OperadorDivergencia4 (k,N) clc; format rational

if N<11
    display('Introduzca un N mayor o igual 11')
else

filas=N*N; columnas=2*N*(N + 1);
```

end

```
%Primera fila de cada uno de los bloques,
%correspondientes a las componentes en X
i=1;
for j=1:(N+1):columnas/2
    D(i,j)=-4751/5192;
    D(i,j+1)=909/1298;
    D(i,j+2)=6091/15576;
    D(i,j+3)=-1165/5192;
    D(i,j+4)=129/2596;
    D(i,j+5)=-25/15576;

    %Filas interiores de cada uno de los bloques,
    %correspondientes a las componentes en X
    for r=0:N-3
        D(i+1+r,j+r)=1/24;
        D(i+1+r,j+1+r)=-9/8;
        D(i+1+r,j+2+r)=9/8;
        D(i+1+r,j+3+r)=-1/24;
    end
    i=i+N;
end

%Última fila de cada uno de los bloques,
%correspondiente a las componentes en X
i=N+1;
for j=N-4:N+1:columnas/2
    D(i-1,j)=25/15576;
    D(i-1,j+1)=-129/2596;
```

```

        D(i-1,j+2)=1165/5192;
        D(i-1,j+3)=-6091/15576;
        D(i-1,j+4)=-909/1298;
        D(i-1,j+5)=4751/5192;
        i=i+N;
    end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CONSTRUCCIÓN DE Dy%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %Primera fila de cada uno de los bloques, correspondientes
    %a las componentes en Y
    i=1;
    for j=columnas/2+1:N+1:columnas
        D(i,j)=-4751/5192;
        D(i,j+1)=909/1298;
        D(i,j+2)=6091/15576;
        D(i,j+3)=-1165/5192;
        D(i,j+4)=129/2596;
        D(i,j+5)=-25/15576;
        i=i+1;
    end

    end

    %Filas interiores de cada uno de los bloques,
    %correspondientes a las componentes en Y
    p=0;
    for i=N+1:N:filas-(2*N-1)
        w=i;
        for j=(columnas/2+1)+p:N+1:columnas
            D(w,j)=1/24;
            D(w,j+1)=-9/8;
            D(w,j+2)=9/8;
            D(w,j+3)=-1/24;

```

```
        w=w+1;
    end
    p=p+1;
end

%Última fila de cada uno de los bloques,
%correspondientes a las componentes en Y
i=filas-(N-1);
for j=columnas/2+(N-4):N+1:columnas
    D(i,j)=25/15576;
    D(i,j+1)=-129/2596;
    D(i,j+2)=1165/5192;
    D(i,j+3)=-6091/15576;
    D(i,j+4)=-909/1298;
    D(i,j+5)=4751/5192;
    i=i+1;
end

D=sparse(D) %Operador de Divergencia
display('El Operador de Divergencia Mimético de Cuarto
Orden es de dimensión:')
size(D)
spy(D)

return;
```

Gradiente Discreto

```
function G = OperadorGradiente4 (k,N)
%clc;

format rational

if N<11 %Número mínimo de celdas sobre el cual se
        %desea calcular el Operador Gradiente
        display('Introduzca un N mayor o igual a 11')
else

    filas=2*N*(N+1); % Número total de filas del
                    %Operador Gradiente
    columnas=N*(N+4); % Número total de columnas del
                    %Operador Gradiente

end

%Primera fila de cada uno de
%los bloques correspondientes a Gx
i=1;
for j=N+1:N+2:columnas-(2*N+1)
    G(i,j)=-1152/407;
    G(i,j+1)=10063/3256;
    G(i,j+2)=2483/9768;
    G(i,j+3)=-3309/3256;
    G(i,j+4)=2099/3256;
    G(i,j+5)=-697/4884;
    i=i+(N+1);
end
```

```
%Segunda fila de cada uno de los
%bloques correspondientes a Gx
i=2;
for j=N+2:N+2:columnas-(N+4)
    G(i,j)=-11/12;
    G(i,j+1)=17/24;
    G(i,j+2)=3/8;
    G(i,j+3)=-5/24;
    G(i,j+4)=1/24;

    %Filas interiores de cada uno de
    %los bloques correspondientes a Gx
    for r=0:N-4
        G(i+1+r,j+r)=1/24;
        G(i+1+r,j+1+r)=-9/8;
        G(i+1+r,j+2+r)=9/8;
        G(i+1+r,j+3+r)=-1/24;
    end
    i=i+(N+1);
end

%Penúltima fila de cada uno
%de los bloques correspondientes a Gx
i=N;
for j=2*N-3:N+2:columnas-(N+5)
    G(i,j)=-1/24;
    G(i,j+1)=5/24;
    G(i,j+2)=-3/8;
    G(i,j+3)=-17/24;
    G(i,j+4)=11/12;
    i=i+(N+1);
```

```

end

%Última fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a Gx
i=N+1;
for j=2*N-3:N+2:columnas-(N+5)
    G(i,j)=697/4884;
    G(i,j+1)=-2099/3256;
    G(i,j+2)=3309/3256;
    G(i,j+3)=-2483/9768;
    G(i,j+4)=-10063/3256;
    G(i,j+5)=1152/407;
    i=i+(N+1);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CONSTRUCCIÓN DE Gy%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Primera fila de cada uno de los
%bloques correspondientes a Gy
j=1;
for i=filas/2+1:N+1:filas
    G(i,j)=-1152/407;
    G(i,j+N+1)=10063/3256;
    G(i,j+2*N+3)=2483/9768;
    G(i,j+3*N+5)=-3309/3256;
    G(i,j+4*N+7)=2099/3256;
    G(i,j+5*N+9)=-697/4884;

    %Segunda fila de cada uno de los
    %bloques correspondientes a Gy
    G(i+1,j+N+1)=-11/12;

```

```

        G(i+1,j+2*N+3)=17/24;
        G(i+1,j+3*N+5)=3/8;
        G(i+1,j+4*N+7)=-5/24;
        G(i+1,j+5*N+9)=1/24;

%Filas interiores de cada uno
%de los bloques correspondientes a Gy
for p=0:N-4
        G(i+2+p,j+(N+1)+(N+2)*p)=1/24;
        G(i+2+p,j+2*N+3+(N+2)*p)=-9/8;
        G(i+2+p,j+3*N+5+(N+2)*p)=9/8;
        G(i+2+p,j+4*N+7+(N+2)*p)=-1/24;
end
j=j+1;
end

%Penúltima fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a Gy
j=columnas-(7*N+3);
for i=filas/2+N+1:N+1:filas
        G(i-1,j+N-5)=-1/24;
        G(i-1,j+2*N-3)=5/24;
        G(i-1,j+3*N-1)=-3/8;
        G(i-1,j+4*N+1)=-17/24;
        G(i-1,j+5*N+3)=11/12;

%Última fila de cada uno de los bloques
%correspondientes a Gy
        G(i,j+N-5)=697/4884;
        G(i,j+2*N-3)=-2099/3256;
        G(i,j+3*N-1)=3309/3256;

```

```
G(i,j+4*N+1)=-2483/9768;  
G(i,j+5*N+3)=-10063/3256;  
G(i,j+6*N+4)=1152/407;  
j=j+1;  
end  
  
G=sparse(G)  
display('El Operador Gradiente Mimético de  
Cuarto Orden es de dimensión:')  
size(G)  
spy(G)  
  
return;
```

Apéndice G

OPERADORES DISCRETOS DE SEGUNDO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MAPLE

Divergencia Discreta

```
> restart;  
> with(linalg):  
> with(plots):  
> with(LinearAlgebra):  
  
> N:=5: Número de celdas del mallado  
> M:=(N+1):  
> filas:=N^2:Número total de filas del Operador de Divergencia  
> columnas:=2*N*(N+1):Número total de columnas del Operador Gradiente  
> Div:=RandomMatrix(columnas,filas,density=0):
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN X DEL OPERADOR
DE DIVERGENCIA BIDIMENSIONAL
ORDEN: 2-2-2

```
>cont1:=1:
> i:=1:
> j:=1:
> while i<=(filas) do
>     if (i=cont1*N+1) then
>         j:=i+cont1:
>         cont1:=cont1+1:
>     end if :
>     Div[j,i]:=-1/hx:
>     Div[j+1,i]:=1/hx:
>     i:=i+1:
>     j:=j+1:
> end do :
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN Y DEL OPERADOR
DE DIVERGENCIA BIDIMENSIONAL
ORDEN: 2-2-2

```
t:=(columnas/2+1):
> for i from 1 by N to (filas) do
>     p:=0:
>     for j from t by (N+1) to (columnas-1) do
>         Div[j,i+p]:=-1/hy:
>         Div[j+1,i+p]:=1/hy:
>         p:=p+1;
>     end do :
>     t := t+1:
> end do :
```

```

> Spy:=sparsematrixplot(Div, 'color=blue'):
> display(Spy):

> V:=array(1..columnas,1..1):
> for s from 0 by (N+1) to (filas-1) do
>   for t from 1 to (N+1) do
>     V[s+t,1]:=x[t]^n;
>     V[s+t+(columnas/2),1]:=y[t]^n;
>   end do :
> end do :

> Div:=transpose(Div):
> DivV:=evalm(Div&*V):
> DivV:=simplify(subs({n=2,seq(x[i+1]=i*hx,i=0..N),
                           seq(y[i+1]=i*hy,i=0..N)},evalm(Div&*V)));

```

[hx+hy]	[7hx+5hy]
[3hx+hy]	[9hx+5hy]
[hy+5hx]	[hx+7hy]
[hy+7hx]	[3hx+7hy]
[hy+9hx]	[5hx+7hy]
[hx+3hy]	[7hx+7hy]
DivV:=[3hx+3hy]	[9hx+7hy]
[3hy+5hx]	[hx+9hy]
[3hy+7hx]	[3hx+9hy]
[3hy+9hx]	[5hx+9hy]
[hx+5hy]	[7hx+9hy]
[3hx+5hy]	[9hy+9hx]
[5hx+5hy]	

Gradiente Discreto

```
> restart;
> with(linalg):
> with(plots):
> with(LinearAlgebra):

> N:=5: Número de celdas del mallado
> filas:=2*N*(N+1): Número total de filas del Operador Gradiente
> columnas:=N*(N+4): Número total de columnas del Operador Gradiente
> Grad:= RandomMatrix(columnas,filas,density=0):
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN X DEL OPERADOR

GRADIENTE BIDIMENSIONAL

ORDEN: 2-2-2

```
i:=1:
>   for j from (N+1) by (N+2) to (columnas-11) do
>       Grad[j,i]:=-8/(3*hx):
>       Grad[j+1,i]:=3/hx:
>       Grad[j+2,i]:=-1/(3*hx):
>
>       for r from 0 to (N-2) do
>           Grad[j+1+r,i+1+r]:=-1/hx:
>           Grad[j+2+r,i+1+r]:=1/hx:
>       end do:
>       i:=i+(N+1):
>   end do :

> i:=(N+1):
>   for j from 2*N by (N+2) to (columnas-(N+2)) do
>       Grad[j,i]:=1/(3*hx):
```

```

>          Grad[j+1,i] := -3/hx:
>          Grad[j+2,i] := 8/(3*hx):
>          i:=i+(N+1):
>      end do :

```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN Y DEL OPERADOR

GRADIENTE BIDIMENSIONAL

ORDEN: 2-2-2

```

j:=1:
>      for i from (filas/2+1) by (N+1) to (filas) do
>          Grad[j,i] := -8/(3*hy):
>          Grad[j+(N+1),i] := 3/hy:
>          Grad[j+(2*N+3),i] := -1/(3*hy):

>      for p from 0 to (N-2) do
>          Grad[j+(N+1)+(N+2)*p,i+1+p] := -1/hy:
>          Grad[j+(2*N+3)+(N+2)*p,i+1+p] := 1/hy:
>      end do :
>      j:=j+1:
>      end do :

> j:=(columnas-(3*N+2)):
>      for i from (filas/2+(N+1)) by (N+1) to (filas) do
>          Grad[j,i] := 1/(3*hy):
>          Grad[j+(N+2),i] := -3/hy:
>          Grad[j+(2*N+3),i] := 8/(3*hy):
>          j:=j+1:
>      end do :

> Spy:=sparsematrixplot(Grad, 'color=blue'):display(Spy):
> f:=array(1..columnas,1..1):

```

```

> for i from 1 to N do
>   f[i,1]:=x[i+1/2]^n+y[1]^n;
>   f[N*(N+3)+i,1]:=x[i+1/2]^n+y[N+1]^n;
>   f[(N+1)+(i-1)*(N+2),1]:=x[1]^n+y[i+1/2]^n;
>
>   for j from 1 to N do
>     f[N+(i-1)*(N+2)+1+j,1]:=x[j+1/2]^n+y[i+1/2]^n;
>   end do :
>   f[N+i*(N+2),1]:=x[N+1]^n+y[i+1/2]^n;
> end do :

> Grad:=transpose(Grad):Gradf:=evalm(Grad*f):
> Gradf:=simplify(subs({n=2,seq(x[i+1]=i*hx,i=0..N),
    seq(x[i+1/2]=(i-1/2)*hx,i=1..N),seq(y[i+1]=i*hy,i=0..N)
    ,seq(y[i+1/2]=(i-1/2)*hy,i=1..N)},evalm(Gradf)));

```

	[0]	[0]
	[2hx]	[2hy]
	[4hx]	[4hy]
	[6hx]	[6hy]
	[8hx]	[8hy]
	[10hx]	[10hy]
	[0]	[0]
	[2hx]	[2hy]
	[4hx]	[4hy]
	[6hx]	[6hy]
	[8hx]	[8hy]
	[10hx]	[10hy]
	[0]	[0]
	[2hx]	[2hy]
Gradf :=	[4hx]	[4hy]
	[6hx]	[6hy]
	[8hx]	[8hy]
	[10hx]	[10hy]
	[0]	[0]
	[2hx]	[2hy]
	[4hx]	[4hy]
	[6hx]	[6hy]
	[8hx]	[8hy]
	[10hx]	[10hy]
	[0]	[0]
	[2hx]	[2hy]
	[4hx]	[4hy]
	[6hx]	[6hy]
	[8hx]	[8hy]
	[10hx]	[10hy]

Apéndice H

OPERADORES DISCRETOS DE CUARTO ORDEN EN 2D: CÁLCULOS MAPLE

Divergencia Discreta

```
> restart;  
> with(linalg):  
> with(plots):  
> with(LinearAlgebra):  
> N:=11: Número de celdas del mallado  
> filas:=N^2: Número total de filas del Operador de Divergencia  
> columnas:=2*N*(N + 1): Número total de columnas del Operador de Divergencia  
> Div := RandomMatrix(columnas,filas, density=0):
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN X DEL OPERADOR DE
DIVERGENCIA BIDIMENSIONAL

ORDEN: 4-4-4

```
i:=1:
>   for j from 1 by (N+1) to (columnas/2) do
>       Div[j,i]:=-4751/(5192*hx):
>       Div[(j+1),i]:=909/(1298*hx):
>       Div[(j+2),i]:=6091/(15576*hx):
>       Div[(j+3),i]:=-1165/(5192*hx):
>       Div[(j+4),i]:=129/(2596*hx):
>       Div[(j+5),i]:=-25/(15576*hx):

>       for r from 0 to (N-3) do
>           Div[(j+r),i+r+1]:=1/(24*hx):
>           Div[(j+1)+r,i+r+1]:=-9/(8*hx):
>           Div[(j+2)+r,i+r+1]:=9/(8*hx):
>           Div[(j+3)+r,i+r+1]:=-1/(24*hx):
>       end do :
>       i:=i+N:
>   end do :

> i:=(N+1):
>   for j from (N-4) by (N+1) to (columnas/2) do
>       Div[j,i-1]:=25/(15576*hx):
>       Div[(j+1),i-1]:=-129/(2596*hx):
>       Div[(j+2),i-1]:=1165/(5192*hx):
>       Div[(j+3),i-1]:=-6091/(15576*hx):
>       Div[(j+4),i-1]:=-909/(1298*hx):
>       Div[(j+5),i-1]:=4751/(5192*hx):
>       i:=i+N:
>   end do:
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN Y DEL OPERADOR DE
DIVERGENCIA BIDIMENSIONAL

ORDEN: 4-4-4

```
i:=1:
>   for j from (columnas/2+1) by (N+1) to (columnas) do
>       Div[j,i]:=-4751/(5192*hy):
>       Div[j+1,i]:=909/(1298*hy):
>       Div[j+2,i]:=6091/(15576*hy):
>       Div[j+3,i]:=-1165/(5192*hy):
>       Div[j+4,i]:=129/(2596*hy):
>       Div[j+5,i]:=-25/(15576*hy):
>       i:=i+1:
>   end do:

>   p:=0:
>   for i from (N+1) by N to (filas-(2*N-1)) do
>       w:=i:
>       for j from ((columnas/2+1)+p) by (N+1) to (columnas) do
>           Div[j,w]:=1/(24*hy):
>           Div[j+1,w]:=-9/(8*hy):
>           Div[j+2,w]:=9/(8*hy):
>           Div[j+3,w]:=-1/(24*hy):
>           w:=w+1:
>       end do :
>       p:=p+1:
>   end do :

>   i:=(filas-(N-1)):
>   for j from (columnas/2+(N-4)) by (N+1) to (columnas) do

>       Div[j,i]:=25/(15576*hy):
```

```
>      Div[j+1,i]:=-129/(2596*hy):
>      Div[j+2,i]:=1165/(5192*hy):
>      Div[j+3,i]:=-6091/(15576*hy):
>      Div[j+4,i]:=-909/(1298*hy):
>      Div[j+5,i]:=4751/(5192*hy):
>      i:=i+1:
>  end do :

> Spy:=sparsematrixplot(Div,'color=blue'):
> display(Spy):

> V:=array(1..columnas,1..1):
> for s from 0 by (N+1) to (filas-1) do
>   for t from 1 to (N+1) do
>     V[s+t,1]:=x[t]^n;
>     V[s+t+(columnas/2),1]:=y[t]^n;
>   end do :
> end do :

> Div:=transpose(Div):
> DivV:=evalm(Div&*V):
> DivV:=simplify(subs({n=2,seq(x[i+1]=i*hx,i=0..N),
      seq(y[i+1]=i*hy,i=0..N)},evalm(Div&*V)));
```

	[hx+hy]	[11hx+11hy]
	[3hx+hy]	[13hx+11hy]
	[5hx+hy]	[15hx+11hy]
	[7hx+hy]	[17hx+11hy]
	[9hx+hy]	[19hx+11hy]
	[11hx+hy]	[21hx+11hy]
	[13hx+hy]	[hx+13hy]
	[15hx+hy]	[3hx+13hy]
	[17hx+hy]	[5hx+13hy]
	[19hx+hy]	[7hx+13hy]
	[21hx+hy]	[9hx+13hy]
	[hx+3hy]	[11hx+13hy]
	[3hx+3hy]	[13hx+13hy]
	[5hx+3hy]	[15hx+13hy]
	[7hx+3hy]	[17hx+13hy]
	[9hx+3hy]	[19hx+13hy]
	[11hx+3hy]	[21hx+13hy]
	[13hx+3hy]	[hx+15hy]
	[15hx+3hy]	[3hx+15hy]
	[17hx+3hy]	[5hx+15hy]
	[19hx+3hy]	[7hx+15hy]
	[21hx+3hy]	[9hx+15hy]
	[hx+5hy]	[11hx+15hy]
	[3hx+5hy]	[13hx+15hy]
	[5hx+5hy]	[15hx+15hy]
	[7hx+5hy]	[17hx+15hy]
	[9hx+5hy]	[19hx+15hy]
	[11hx+5hy]	[hx+17hy]
	[13hx+5hy]	[3hx+17hy]
	[15hx+5hy]	[5hx+17hy]
DivV :=	[17hx+5hy]	[7hx+17hy]
	[19hx+5hy]	[9hx+17hy]
	[21hx+5hy]	[11hx+17hy]
	[hx+7hy]	[13hx+17hy]
	[3hx+7hy]	[15hx+17hy]
	[5hx+7hy]	[17hx+17hy]
	[7hx+7hy]	[19hx+17hy]
	[9hx+7hy]	[21hx+17hy]
	[11hx+7hy]	[hx+19hy]
	[13hx+7hy]	[3hx+19hy]
	[15hx+7hy]	[5hx+19hy]
	[17hx+7hy]	[7hx+19hy]
	[19hx+7hy]	[9hx+19hy]
	[21hx+7hy]	[11hx+19hy]
	[hx+9hy]	[13hx+19hy]
	[3hx+9hy]	[15hx+19hy]
	[5hx+9hy]	[17hx+19hy]
	[7hx+9hy]	[19hx+19hy]
	[9hx+9hy]	[21hx+19hy]
	[11hx+9hy]	[hx+21hy]
	[13hx+9hy]	[3hx+21hy]
	[15hx+9hy]	[5hx+21hy]
	[17hx+9hy]	[7hx+21hy]
	[19hx+9hy]	[9hx+21hy]
	[21hx+9hy]	[11hx+21hy]
	[hx+11hy]	[13hx+21hy]
	[3hx+11hy]	[15hx+21hy]
	[5hx+11hy]	[17hx+21hy]
	[7hx+11hy]	[19hx+21hy]
	[9hx+11hy]	[21hx+21hy]

Gradiente Discreto

```
> restart;
> with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> N:=11: Número de celdas del mallado
> filas:=2*N*(N+1): Número de filas del Operador Gradiente
> columnas:=N*(N+4): Número de columnas del Operador Gradiente

> Grad:= RandomMatrix(columnas,filas,density=0):
```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN X DEL OPERADOR
GRADIENTE BIDIMENSIONAL
ORDEN: 4-4-4

```
> i:=1:
>   for j from (N+1) by (N+2) to (columnas-(2*N+1)) do
>       Grad[j,i]:=-1152/(407*hx):   Primera fila de cada uno de los
>                                   bloques correspondiente a Gx
>       Grad[j+1,i]:=10063/(3256*hx):
>       Grad[j+2,i]:=2483/(9768*hx):
>       Grad[j+3,i]:=-3309/(3256*hx):
>       Grad[j+4,i]:=2099/(3256*hx):
>       Grad[j+5,i]:=-697/(4884*hx):
>       i:=i+(N+1):
>   end do :

> i:=2:
>   for j from (N+2) by (N+2) to (columnas-(N+4)) do
>       Grad[j,i]:=-11/(12*hx):   Segunda fila de cada uno de los
>                                   bloques correspondiente a Gx
>       Grad[j+1,i]:=17/(24*hx):
```

```

>      Grad[j+2,i]:=3/(8*hx):
>      Grad[j+3,i]:=-5/(24*hx):
>      Grad[j+4,i]:=1/(24*hx):

>      for r from 0 to (N-4) do
>          Grad[j+r,i+1+r]:=1/(24*hx):  Filas interiores de cada uno de
                                          los bloques correspondientes a Gx
>          Grad[j+1+r,i+1+r]:=-9/(8*hx):
>          Grad[j+2+r,i+1+r]:=9/(8*hx):
>          Grad[j+3+r,i+1+r]:=-1/(24*hx):
>      end do :
>      i:=i+(N+1):
>  end do :
>
> i:=N:
>  for j from (2*N-3) by (N+2) to (columnas-(N+5)) do
>      Grad[j,i]:=-1/(24*hx):  Penúltima fila de cada uno de los
                              bloques correspondientes a Gx
>      Grad[j+1,i]:=5/(24*hx):
>      Grad[j+2,i]:=-3/(8*hx):
>      Grad[j+3,i]:=-17/(24*hx):
>      Grad[j+4,i]:=11/(12*hx):
>      i:=i+(N+1):
>  end do :

> i:=(N+1):
>  for j from (2*N-3) by (N+2) to (columnas-(N+5)) do
>      Grad[j,i]:=697/(4884*hx): Última fila de cada uno de los
                              bloques correspondientes a Gx
>      Grad[j+1,i]:=-2099/(3256*hx):

```

```

>      Grad[j+2,i]:=3309/(3256*hx):
>      Grad[j+3,i]:=-2483/(9768*hx):
>      Grad[j+4,i]:=-10063/(3256*hx):
>      Grad[j+5,i]:=1152/(407*hx):
>      i:=i+(N+1):
>  end do :

```

ESTRUCTURA CORRESPONDIENTE A LAS COMPONENTES EN Y DEL OPERADOR
GRADIENTE BIDIMENSIONAL

ORDEN: 4-4-4

```

> j:=1:
>   for i from (filas/2+1) by (N+1) to (filas) do
>     Grad[j,i]:=-1152/(407*hy):      Primera fila de cada uno de los
>                                     bloques correspondientes a Gy
>     Grad[j+(N+1),i]:=10063/(3256*hy):
>     Grad[j+2*N+3,i]:=2483/(9768*hy):
>     Grad[j+3*N+5,i]:=-3309/(3256*hy):
>     Grad[j+4*N+7,i]:=2099/(3256*hy):
>     Grad[j+5*N+9,i]:=-697/(4884*hy):

>     Grad[j+(N+1),i+1]:=-11/(12*hy): Segunda fila de cada uno de los
>                                     bloques correspondientes a Gy
>     Grad[j+2*N+3,i+1]:=17/(24*hy):
>     Grad[j+3*N+5,i+1]:=3/(8*hy):
>     Grad[j+4*N+7,i+1]:=-5/(24*hy):
>     Grad[j+5*N+9,i+1]:=1/(24*hy):

>   for p from 0 to (N-4) do

```

```

>      Grad[j+(N+1)+(N+2)*p,i+2+p]:=1/(24*hy):Filas interiores de cada uno de
                                                los bloques correspondientes a Gy
>      Grad[j+2*N+3+(N+2)*p,i+2+p]:=-9/(8*hy):
>      Grad[j+3*N+5+(N+2)*p,i+2+p]:=9/(8*hy):
>      Grad[j+4*N+7+(N+2)*p,i+2+p]:=-1/(24*hy):
>      end do :
>      j:=j+1:

> end do :

> j:=(columnas-(7*N+3)):
>      for i from ((filas/2)+(N+1)) by (N+1) to (filas) do

>          Grad[j+N-5,i-1]:=-1/(24*hy): Penúltima fila de cada uno de los
                                                bloques correspondientes a Gy
>          Grad[j+2*N-3,i-1]:=5/(24*hy):
>          Grad[j+3*N-1,i-1]:=-3/(8*hy):
>          Grad[j+4*N+1,i-1]:=-17/(24*hy):
>          Grad[j+5*N+3,i-1]:=11/(12*hy):

>          Grad[j+N-5,i]:=697/(4884*hy): Última fila de cada uno de los
                                                bloques correspondientes a Gy
>          Grad[j+2*N-3,i]:=-2099/(3256*hy):
>          Grad[j+3*N-1,i]:=3309/(3256*hy):
>          Grad[j+4*N+1,i]:=-2483/(9768*hy):
>          Grad[j+5*N+3,i]:=-10063/(3256*hy):
>          Grad[j+6*N+4,i]:=1152/(407*hy):
>          j:=j+1:

```

```

>      end do :

> Spy:=sparsematrixplot(Grad,'color=blue'):
> display(Spy):

> f:=array(1..columnas,1..1):

> for i from 1 to N do
>   f[i,1]:=x[i+1/2]^n+y[1]^n;
>   f[N*(N+3)+i,1]:=x[i+1/2]^n+y[N+1]^n;
>   f[(N+1)+(i-1)*(N+2),1]:=x[1]^n+y[i+1/2]^n;

>   for j from 1 to N do
>     f[N+(i-1)*(N+2)+1+j,1]:=x[j+1/2]^n+y[i+1/2]^n;
>   end do :

>   f[N+i*(N+2),1]:=x[N+1]^n+y[i+1/2]^n;
> end do :
> f:=evalm(f):

> Grad:=transpose(Grad):
> Gradf:=evalm(Grad*f):
> Gradf:=simplify(subs({n=2,seq(x[i+1]=i*hx,i=0..N),
      seq(x[i+1/2]=(i-1/2)*hx,i=1..N),seq(y[i+1]=i*hy,i=0..N),
      seq(y[i+1/2]=(i-1/2)*hy,i=1..N)},evalm(Gradf)));

```

```

[ 0 ]      [12hx]      [ 0 ]      [12hy]
[2hx]      [14hx]      [2hy ]      [14hy]
[4hx]      [16hx]      [4hy ]      [16hy]
[6hx]      [18hx]      [6hy ]      [18hy]
[8hx]      [20hx]      [8hy ]      [20hy]
[10hx]     [22hx]      [10hy]      [22hy]
[12hx]     [ 0 ]      [12hy]      [ 0 ]
[14hx]     [2hx]      [14hy]      [2hy]
[16hx]     [4hx]      [16hy]      [4hy]
[18hx]     [6hx]      [18hy]      [6hy]
[20hx]     [8hx]      [20hy]      [8hy]
[22hx]     [10hx]     [22hy]      [10hy]
[ 0 ]      [12hx]      [ 0 ]      [12hy]
[2hx]      [14hx]      [2hy]      [14hy]
[4hx]      [16hx]      [4hy]      [16hy]
[6hx]      [18hx]      [6hy]      [18hy]
[8hx]      [20hx]      [8hy]      [20hy]
[10hx]     [22hx]      [10hy]      [22hy]
[12hx]     [ 0 ]      [12hy]      [ 0 ]
[14hx]     [2hx]      [14hy]      [2hy]
[16hx]     [4hx]      [16hy]      [4hy]
[18hx]     [6hx]      [18hy]      [6hy]
[20hx]     [8hx]      [20hy]      [8hy]
[22hx]     [10hx]     [22hy]      [10hy]
[ 0 ]      [12hx]      [ 0 ]      [12hy]
[2hx]      [14hx]      [2hy]      [14hy]
[4hx]      [16hx]      [4hy]      [16hy]
[6hx]      [18hx]      [6hy]      [18hy]
[8hx]      [20hx]      [8hy]      [20hy]
[10hx]     [22hx]      [10hy]      [22hy]
[12hx]     [ 0 ]      [12hy]      [ 0 ]
[14hx]     [2hx]      [14hy]      [2hy]
[16hx]     [4hx]      [16hy]      [4hy]
[18hx]     [6hx]      [18hy]      [6hy]
[20hx]     [8hx]      [20hy]      [8hy]
[22hx]     [10hx]     [22hy]      [10hy]
[ 0 ]      [12hx]      [ 0 ]      [12hy]
[2hx]      [14hx]      [2hy]      [14hy]
[4hx]      [16hx]      [4hy]      [16hy]
[6hx]      [18hx]      [6hy]      [18hy]
[8hx]      [20hx]      [8hy]      [20hy]
[10hx]     [22hx]      [10hy]      [22hy]
[12hx]     [ 0 ]      [12hy]      [ 0 ]
[14hx]     [2hx]      [14hy]      [2hy]
[16hx]     [4hx]      [16hy]      [4hy]
[18hx]     [6hx]      [18hy]      [6hy]
[20hx]     [8hx]      [20hy]      [8hy]
[22hx]     [10hx]     [22hy]      [10hy]
[ 0 ]      [12hx]      [ 0 ]      [12hy]
[2hx]      [14hx]      [2hy]      [14hy]
[4hx]      [16hx]      [4hy]      [16hy]
[6hx]      [18hx]      [6hy]      [18hy]
[8hx]      [20hx]      [8hy]      [20hy]
[10hx]     [22hx]      [10hy]      [22hy]

```

Gradf :=

Apéndice I

OPERADORES DISCRETOS DE FRONTERA Y LAPLACIANO EN 2D: CÁLCULOS MATLAB

En éste apéndice se muestra el código principal en matlab, en donde se unen todas las rutinas vistas en los apéndices E y F, además de calcularse el operador de frontera **B** y el operador laplaciano.

```
%%%%%%%%% OPERADORES DIFERENCIALES DISCRETOS MIMÉTICOS EN 2D %%%%%%%%%%
```

```
clear all; clc;
int k; % Orden k requerido en el operador
int N; % Número de celdas del mallado sobre el cual se
        % requiere calcular el Operador

k=1; while(k~=2 & k~=4) clc;
    k=input('Introduzca el orden k del Operador : ')
    N=input('Introduzca el número de celdas N : ')
```

```

switch k
    case 2
        D=OperadorDivergencia2(k,N); %Operador Divergencia de Orden 2
        subplot(2,2,1);
        spy(D);
        title('Operador de Divergencia Bidimensional de Orden 2')

        G=OperadorGradiente2(k,N); %Operador Gradiente de Orden 2
        subplot(2,2,2);
        spy(G);
        title('Operador Gradiente Bidimensional de Orden 2')

        Lap=(D+G) %Operador Laplaciano
        display('El Operador Laplaciano Mimético es de dimensión:')
        size(Lap)
        subplot(2,2,3);
        spy(Lap);
        title('Operador Laplaciano Bidimensional')

        Qhat=eye(N*(N+4));
        Dhat=[zeros(2*N,2*N*(N+1));D;zeros(2*N,2*N*(N+1))];
        P=eye(2*N*(N+1));
        P(1,1)=3/8;
        P(2,2)=9/8;
        P(2*N*(N+1),2*N*(N+1))=3/8;
        P(2*N*(N+1)-1,2*N*(N+1)-1)=9/8;
        B=sparse(Qhat*Dhat+G'*P) %Operador de Frontera
        display('El Operador de Frontera Mimético B es de dimensión:')
        size(B)

```

```
subplot(2,2,4);
spy(B);
title('Operador de Frontera Bidimensional')

case 4
D=OperadorDivergencia4(k,N); %Operador de Divergencia de Orden 4
subplot(2,2,1);
spy(D);
title('Operador de Divergencia Bidimensional de Orden 4')

G=OperadorGradiente4(k,N); %Operador Gradiente de Orden 4
subplot(2,2,2);
spy(G);
title('Operador Gradiente Bidimensional de Orden 4')

Lap=(D*G) %Operador Laplaciano
display('El Operador Laplaciano Mimético es de dimensión:')
size(Lap)
subplot(2,2,3);
spy(Lap);
title('Operador Laplaciano Bidimensional')

Qhat=eye(N*(N+4));
Qhat(1,1)=649/576;
Qhat(2,2)=143/192;
Qhat(3,3)=75/64;
Qhat(4,4)=551/576;
Qhat(N*(N+4)-3,N*(N+4)-3)=551/576;
Qhat(N*(N+4)-2,N*(N+4)-2)=75/64;
Qhat(N*(N+4)-1,N*(N+4)-1)=143/192;
```

```

Qhat(N*(N+4),N*(N+4))=649/576;
Dhat=[zeros(2*N,2*N*(N+1));D;zeros(2*N,2*N*(N+1))];
P=eye(2*N*(N+1));
P(1,1)=407/1152;
P(2,2)=473/384;
P(3,3)=343/384;
P(4,4)=1177/1152;
P(2*N*(N+1)-3,2*N*(N+1)-3)=1177/1152;
P(2*N*(N+1)-2,2*N*(N+1)-2)=343/384;
P(2*N*(N+1)-1,2*N*(N+1)-1)=473/384;
P(2*N*(N+1),2*N*(N+1))=407/1152;

B=sparse(Qhat*Dhat+G'*P) %Operador de Frontera
display('El Operador de Frontera Mimético B es de dimensión:')
size(B)
subplot(2,2,4);
spy(B);
title('Operador de Frontera Bidimensional')

otherwise
    display('Introduzca k=2 o k=4. Pulse Enter para continuar');
    pause
end

end

```

Bibliografía

- [1] Castillo José E. and Grone R. D. *A Matrix Analysis Approach to Higher-Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law. SIAM J. MATRIX ANAL.*, No. 1, Vol. 25:128–142, 2003.
- [2] Montilla Orestes, Cadenas Carlos, and Castillo José. *Matrix approach to mimetic discretizations for differential operators on non-uniform grids. Mathematics and Computers in Simulation*, 8:18, 2006.
- [3] Castillo José E., Hyman James M., Shashkov Mikhail J., and Steinberg Stanly. *High-Order Mimetic Finite Difference Methods on Nonuniform Grids. In ICOSAHOM-95, Proc. Of The Third International Conference on Spectral and High Order Methods.*, page 16, 5-9 June (1995).
- [4] Hyman James M. and Scovel J. C. *Deriving mimetic difference approximations to differential operators using algebraic topology.* Technical report, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, 1988.
- [5] Shashkov Mikhail and Steinberg Stanly. *Solving Diffusion Equations with Rough Coefficients in Rough Grids. Journal of Computational Physics*, 129:383–405, 1996.
- [6] Hyman James M. and Shashkov Mikhail. *Adjoint Operators for the Natural Discretizations of the Divergence, Gradient and Curl on Logically Rectangular Grids. Applied Numerical Mathematics*, 25:413–442, 1997.

BIBLIOGRAFÍA

- [7] Hyman James M. and Shashkov Mikhail. *Approximation of Boundary Conditions for Mimetic Finite-Difference Methods* . *Computers Math. Applic.*, vol 36, No. 5:79–99, 1998.
- [8] Castillo José E., Hyman James M., Shashkov Mikhail J., and Steinberg Stanly. *Fourth- and Six-Order Conservative Finite Difference Approximations of the Divergence and Gradient*. *Applied Numerical Mathematics*, pages 171–187, 2001.
- [9] Freites-Villegas M., Guevara-Jordan J. M., Rojas O.R., Catillo J. E., and Rojas S. *A Mimetic Finite Difference Scheme for Solving the Steady State Diffusion Equation with Singular Functions* . *Simulación Numérica y Modelado Computacional*, pages TM25–TM36, 2004.
- [10] Cadenas Carlos E. and MontillaOrestes. *Matriz de Vandermonde generalizada para la construcción de los operadores de divergencia discreta mimética*. *REVISTA INGENIERÍA UC*, No 2, Vol. 11:48–52, 2004.
- [11] Hernández Franzyuri. *Estudio de los Sistemas Lineales Dispersos Provenientes de Discretizaciones Miméticas. Caso: Operador de Convección-Difusión*. *Trabajo Especial de Grado de Maestría*, page 173, 2006.
- [12] Samarskii A. A., Tishkin V. F., Favorskii A. P., and Shashkov M. J. *Operational Finite-Difference Schemes*. *Diff. Eqns.*, 1981.
- [13] Samarskii A. A., Tishkin V. F., Favorskii A. P., Shashkov M., and Yu. *Employment of the Reference-Operator Method in the Construction of Finite Difference Analogs Of tensor Operations*. *Diff. Eqns.*, 18, 7, pages 881–885, 1982.
- [14] Favorskii A., Korshiya T., Shashkov M. J., and Tishkin V. *Variational Approach to The Construction of Finite-Difference Schemes for The Diffusion Equations for Magnetic Field*. *Differential Equations*, 18(7):863–872, 1982.
- [15] Castillo José, Hyman James M., Shashkov Mikhail, and Steinberg Stanly. *The sensitivity and accuracy of fourth orden finite-diffrence schemes on non-uniform grids in one dimension*. *Comput. Math. Appl.*, 30–8, pages 41–55, 1995.

BIBLIOGRAFÍA

- [16] Shashkov Mikhail J. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. Edition by Stanley Steimberg, Boca Raton, FL, 1996. With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch).
- [17] Montilla Orestes. *Generador Automático de Operadores de Divergencia Discretos Basados en Métodos Miméticos*. page 142, 2004.
- [18] Andrew A. L. *Centrosymmetric Matrices*. *SIAM, Rev.* 40, pages 697–699, 1998.
- [19] Castillo José and Yasuda Mark. *A Comparison of Two Matrix Operator Formulations for Mimetic Divergence and Gradient Discretizations*. *Proceedings of the International Conference on Parallel and Distributed Procesings Techniques and Applications*, Volume III:1281–1285, 2003.